

7 Siâp a gofod

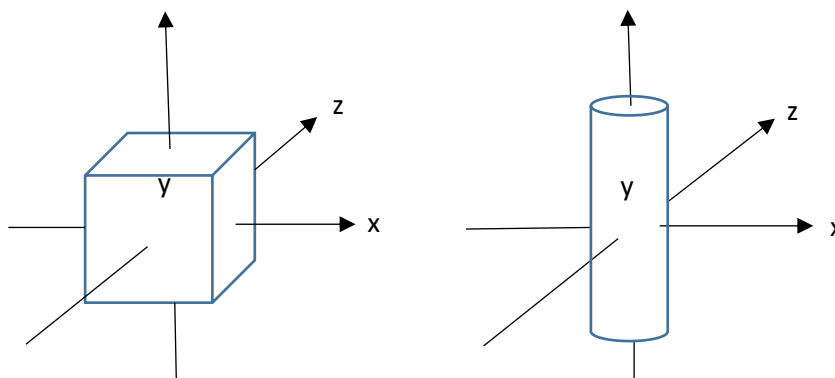
Mae mathemateg yn ymwneud yn bennaf â nodi patrymau yn ymddygiad data a defnyddio'r patrymau hyn i ddatrys problemau. Bydd hyn yn aml yn golygu rhifau, ond mewn llawer o sefyllfaoedd pwysig mae gennym ddi-ddordeb yn ymddygiad a phriodweddau siapiau. Gall gweithio gyda siapiau yn cynyddu ymwybyddiaeth ofodol mewn dau a thri dimensiwn a gallant ddatblygu medrau mathemategol mewn geometreg a thrigonometreg. Yn ogystal, efallai y bydd cyfleoedd ar gyfer defnyddio technegau mathemategol ehangach, megis: cymarebau ar gyfer trosi graddfeydd, neu algebra i drawsnewid siapiau. Yn y bennod hon, rydym yn archwilio cymhwysiadau rhifedd ymarferol amrywiol yn ymwneud â mathemateg o siâp a gofod.

Trawsnewid capel

Gall myfyrwyr mewn adeiladwaith, dylunio a thechnoleg, a chyfrifiadureg yn elwa o brofiad yn y defnydd o feddalwedd dylunio cyfrifiadurol pensaernïol. Mae amrywiaeth o systemau CAD addas i fyfyrwyr ar gael. Yma, rydym yn disgrifio'r defnydd o ArchiCAD (Graphisoft, 2008a, 2008b) wrth gynhyrchu dyluniadau ar gyfer addasu'r hen gapel yn dŷ teuluol.

Mae systemau CAD pensaernïol yn gweithredu drwy gydosod casgliad o siapiau solet, sydd wedi eu lleoli yn y gofod tri dimensiwn i gynrychioli'r adeilad a'i chydannau. O gasgliad o siapiau, mae'r meddalwedd yn gallu llunio cynlluniau, gweddluniau neu fodelau tri dimensiwn fel sy'n ofynnol gan y defnyddiwr. Gellir cydrannau penodol yr adeilad, megis to, wal neu lawr, ei wneud yn dryloyw fel bod manylion mewnol y strwythur yn weladwy.

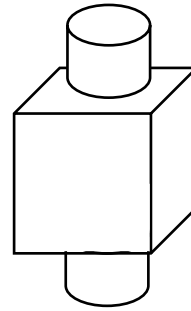
Gall elfennau cymhleth o'r adeilad yn cael ei adeiladu o siapiau syml. Mae hyn yn defnyddio gweithrediadau rhesymeg ar siapiau solet. Er mwyn dangos y broses, yn ystyried dau siâp, silindr a chiwb, sydd â'u canolfannau ar yr un pwynt yn y gofod tri dimensiwn:



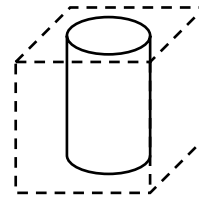
Ffigur 118: Siapiau solet

Gall y siapiau yn cael eu cyfuno mewn ffyrdd gwahanol:

- Mae gweithrediad rhesymegol OR yn cynhyrchu siâp sy'n cynnwys yr holl o'r silindr a'r ciwb gwreiddiol:

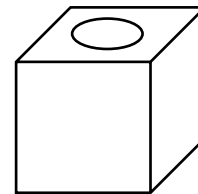


- Mae gweithrediad rhesymegol AND yn gadael dim ond yr ardal ganolog ble mae'r silindr a chiwb gorgyffwrdd â'i gilydd:

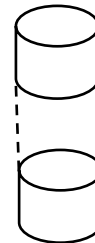


Mae dau wahanol weithrediad rhesymegol NOT yn bosibl.

- Yn y cyntaf, yr ydym yn cael yr holl gyfaint y ciwb nad ydynt hefyd yn y silindr. Mae hyn yn creu twll drwy'r ciwb:



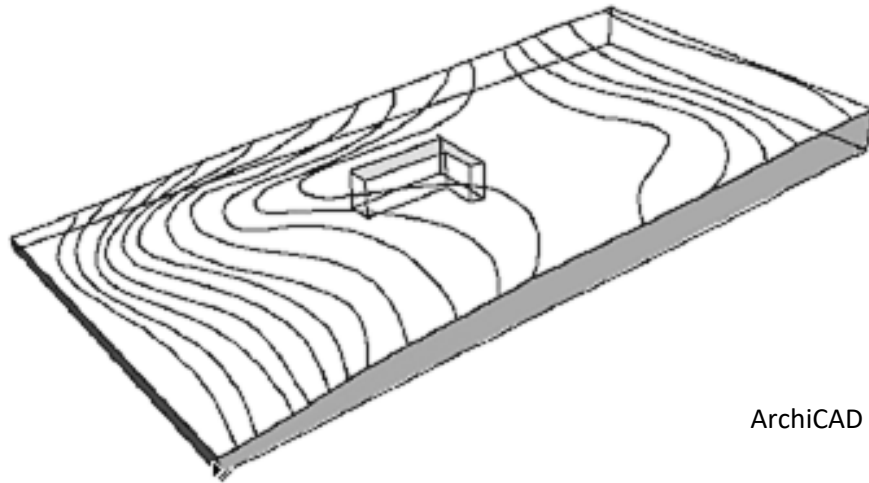
- Yn yr ail, yr ydym yn cael yr holl gyfaint y silindr nad ydynt hefyd yn y ciwb. Mae hyn yn gadael dim ond y ddau ben y silindr gwreiddiol:



Ffigur 119: Gweithrediadau rhesymeg ar y siapiau solet

Drwy gyfuniad o weithrediadau hyn, gall cydrannau adeiladu cymhleth yn cael ei chreu.

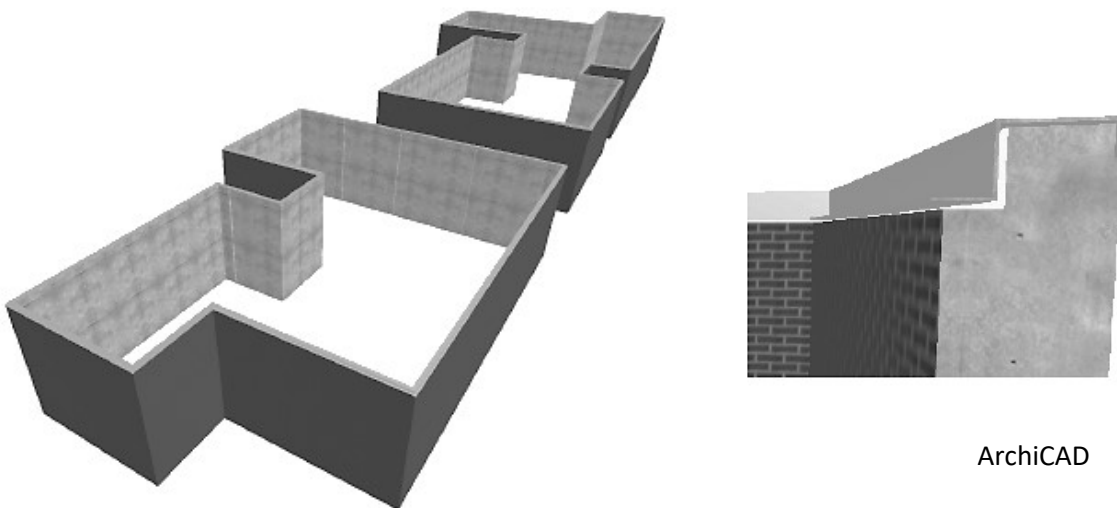
Mae dyluniad adeilad yn dechrau gyda chynllun y safle. Efallai y bydd y lleoliad fod yn wastad a lefel, ond yn aml bydd adeilad yn cael ei adeiladu ar safle ar lethr. Mae'r meddalwedd yn caniatáu cyfres o bwytiau uchder i'w gofnodi o arolwg topograffig o'r safle. Meddalwedd wedyn yn rhyngosod rhwng y pwytiau hysbys i gynhyrchu arwyneb cyfuchlinau. Yna, gall y slab sylfaen yr adeilad yn cael ei leoli, fel yn ffigur 120.



ArchiCAD

Ffigur 120: Model cyfuchlin o'r safle, gan gynnwys lleoliad yr adeilad

Gall waliau allanol a mewnol yn cael eu hychwanegu at y slab sylfaen drwy roi eu dimensiynau. Mae'r meddalwedd yn caniatáu dewis o ystod o strwythurau wal safonol, ond gall hefyd yn caniatáu i strwythurau cael ei addasu gan ddefnyddio briciau, blociau, concriid, defnydd inswleiddio neu ddeunyddiau eraill.

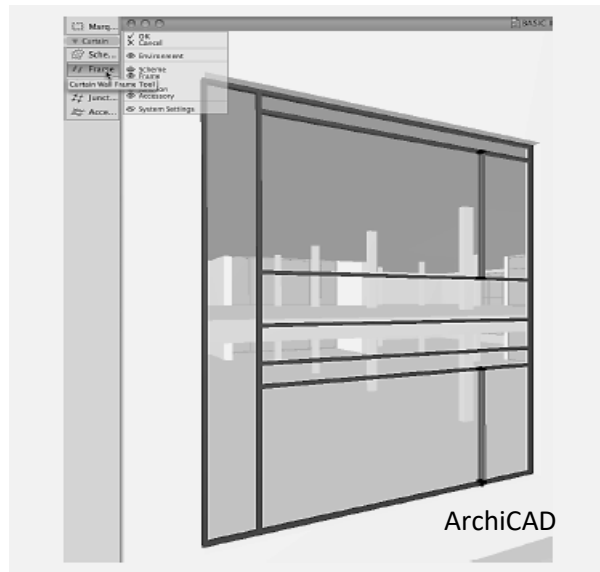


ArchiCAD

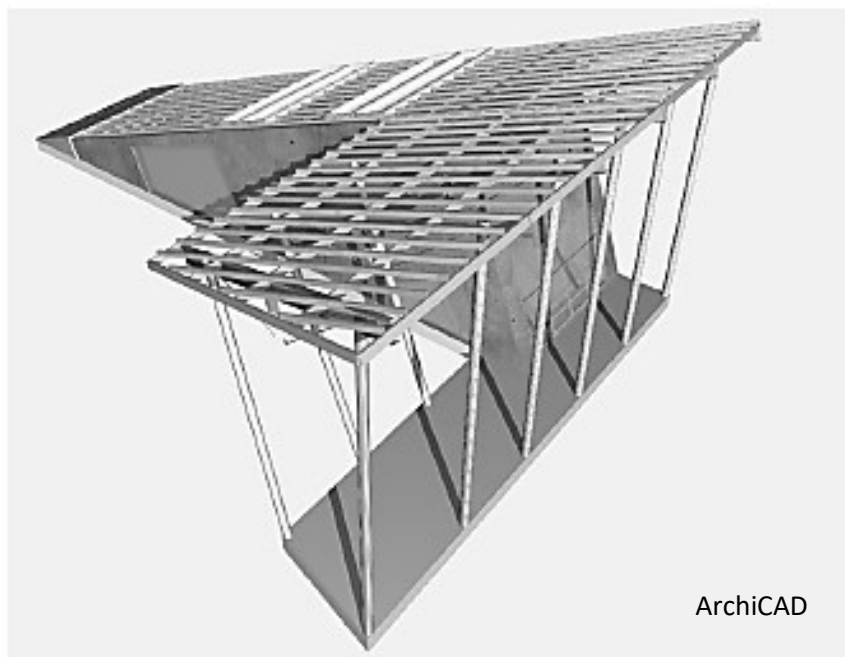
Ffigur 121: Cynllun o waliau allanol, gyda manylion am strwythur y wal

Mae drysau a ffenestri safonol yn cael eu darparu, ond eto, mae'n bosibl i addasu drysau a ffenestri gan ddefnyddio paneli, bariau gwydro a chydrrannau eraill (ffigur 122).

Ffigur 122: Creu ffenestr wedi addasu



Mae nodwedd arbennig o bwysig mewn systemau CAD pensaernïol yw cynrychioli siapiau adeiladu cymhleth, fel nad yw creadigrwydd y pensaer yn gyfyngedig.

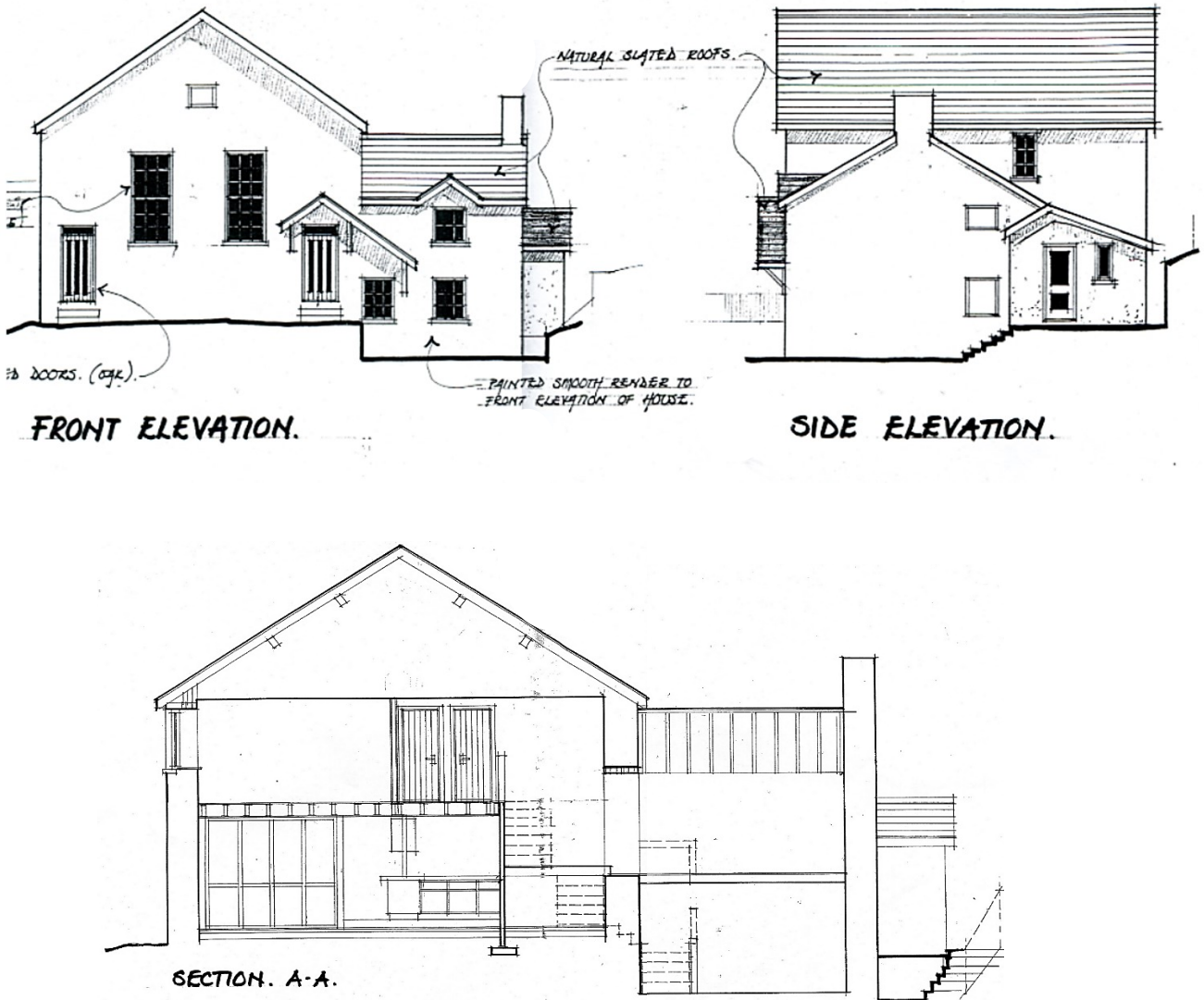


Ffigur 123: Dyluniad adeilad ansafonol, a ddatblygwyd gan weithrediadau geometregol a rhesymegol ar siapiau solet

Cam olaf y dyluniad yw ychwanegu dodrefn a ffitiadau, i gynorthwyo'r pensaer a'u cleientiaid yn dychmygu'r adeilad wedi'i gwblhau.

Mae'r enghraifft rydym yn disgrifio yma yn cynnwys prosiect i drawsnewid hen adeilad capel trwy fewnosod llawr mewnol a grisiau, adeiladu waliau mewnol, ac ychwanegu estyniad cegin newydd yng nghefn yr eiddo.

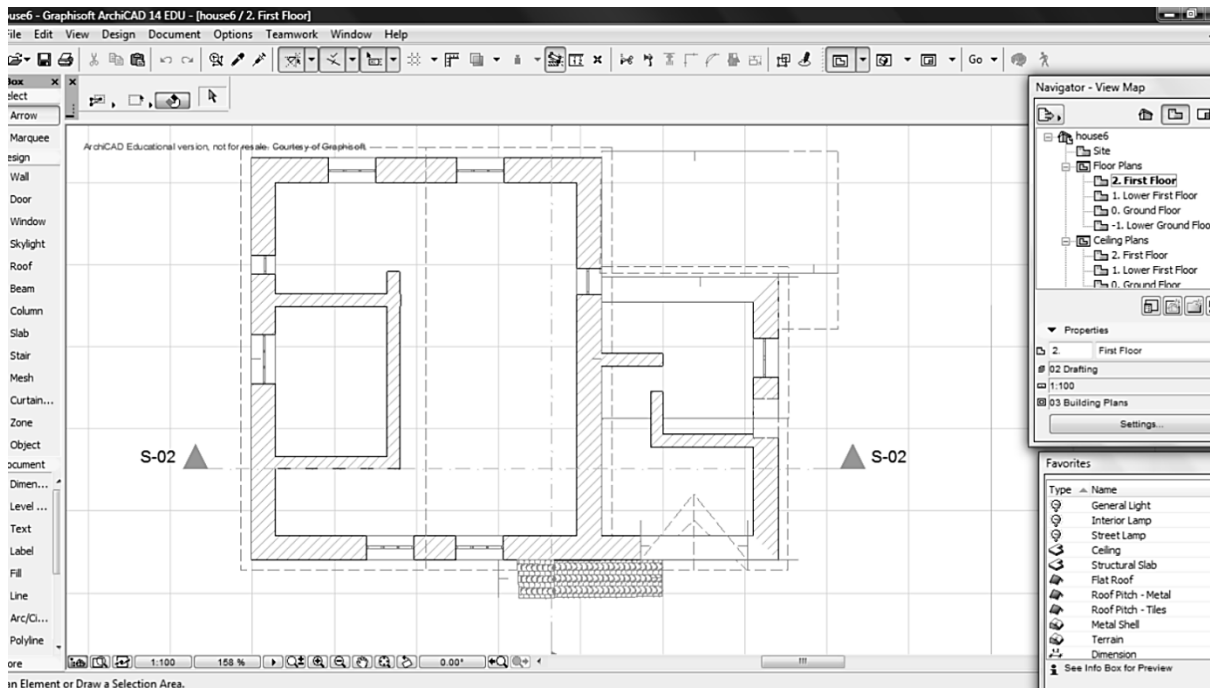
Cafwyd lluniadau pensaer eu darparu, gyda dimensiynau naill ai'n bennir yn uniongyrchol nac ar gael drwy fesur graddfa.



Ffigur 124: Lluniadau pensaer ar gyfer addasu capel

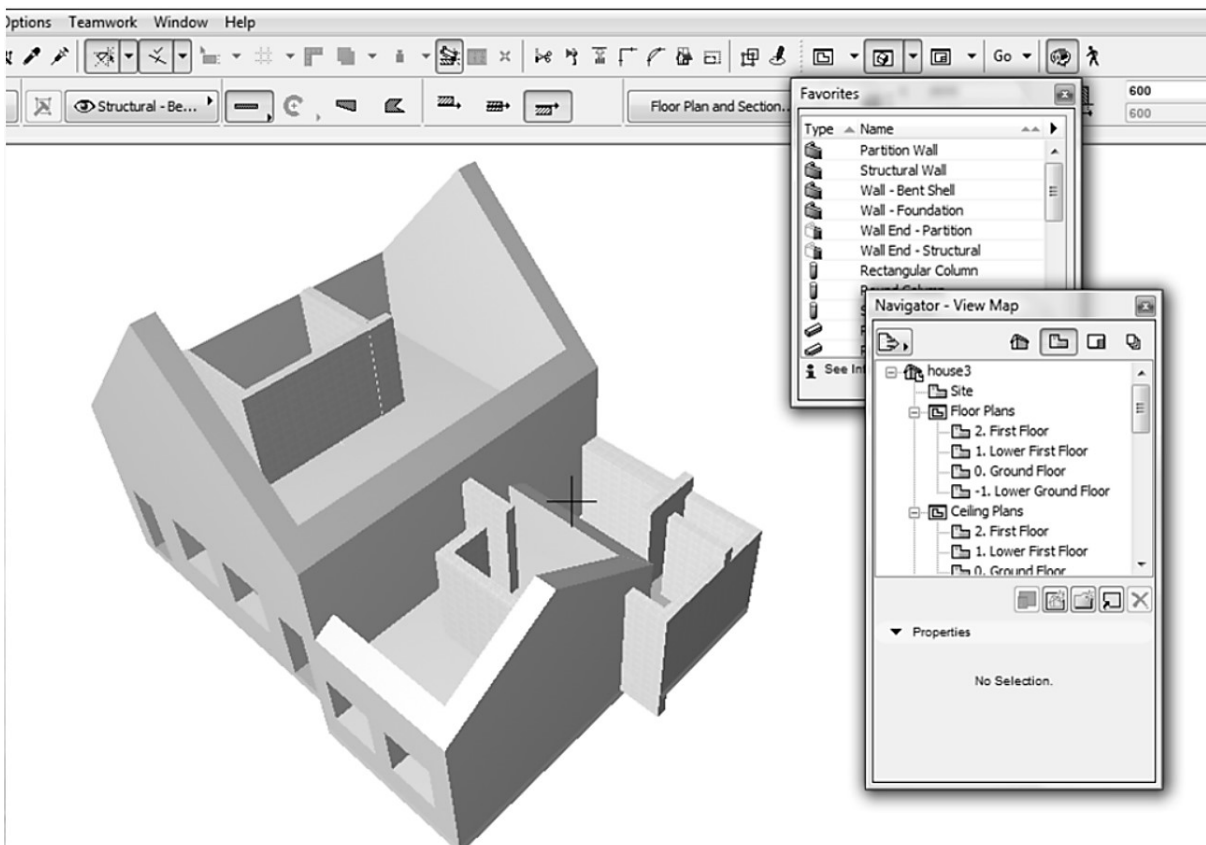
Gan ddefnyddio meddalwedd ArchiCAD, topograffi'r safle ar lethr yn cael ei greu a'r slabiau sylfaen yr adeilad yn cael eu hychwanegu ar y drychiadau priodol.

Yna ychwanegwyd waliau allanol a mewnol, gan ddewis deunyddiau adeiladu priodol.



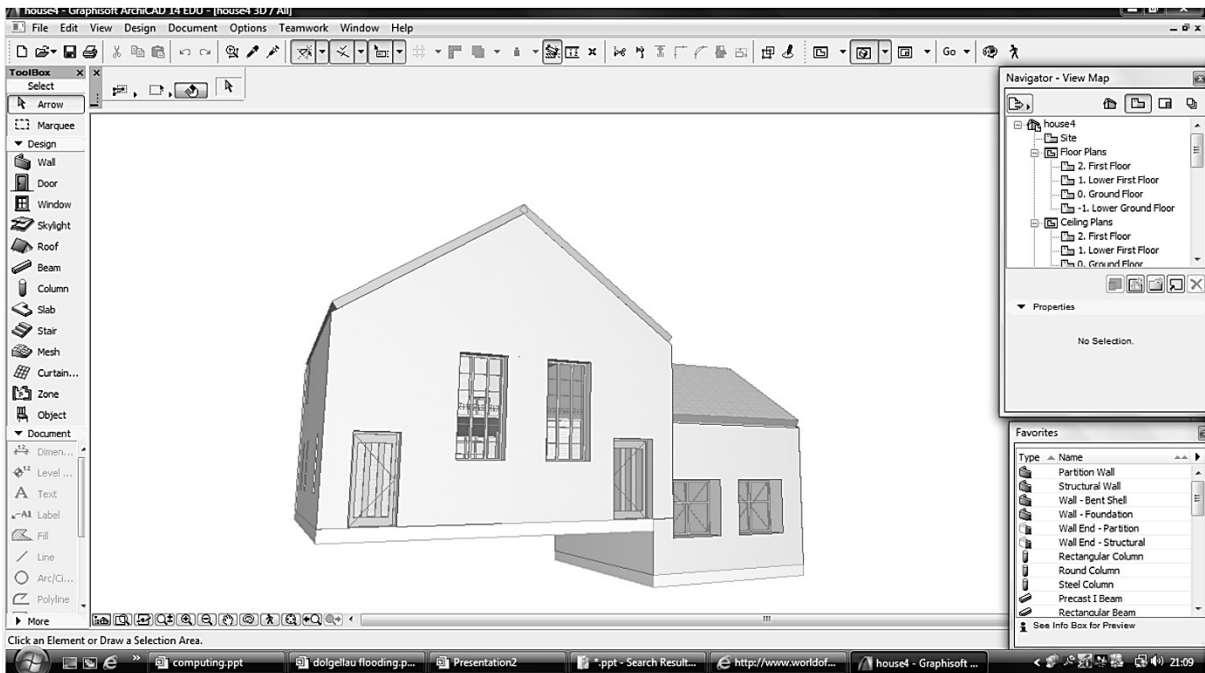
Ffigur 125: Mewnbwn o waliau allanol a mewnol

Mae'r meddalwedd yn arddangos y model solet yn ystod bob cam. Mae newid golwg i safbwynt drychiad yn caniatáu siapiau waliau i gael eu haddasu, er enghraifft lle mae wal flaen y capel yn codi hyd at linell grib y to.



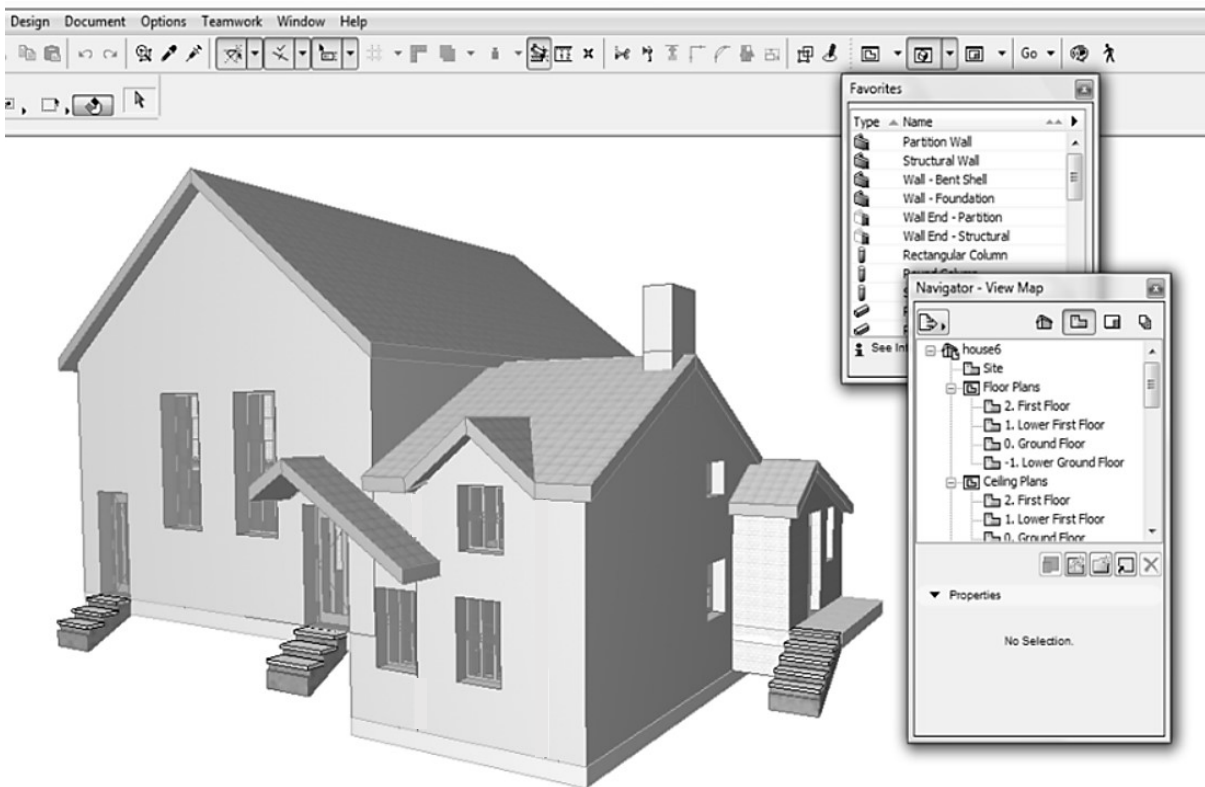
Ffigur 126: Model solet ar ôl ychwanegu waliau allanol a mewnol

Mae toeau, ffenestri a drysau yn cael eu hychwanegu. Addaswyd cydrannau yn ôl y manylion a ddangosir ar luniadau'r pensaer.



Ffigur 127: Toeau, ffenestri a drysau wedi eu hychwanegu at y model

Camau olaf wrth adeiladu'r model yw ychwanegu nodweddion allanol a mewnol gan gynnwys cynteddau, grisiau, ystafell ymolchi a ffitiadau cegin.



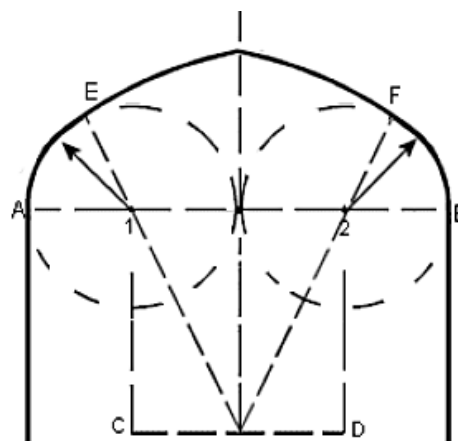
Ffigur 128: Ychwanegu manylion pensaernïol i'r adeilad

Cromliniau mewn adeiladwaith

Mae elfennau o'r capel a ddisgrifir yn yr adran flaenorol oll a wnaed o arwynebau gwastad, ond nid yw'n anghyffredin i gromliniau i'w defnyddio mewn cynlluniau adeiladu: er enghraifft mewn cromenni neu fwâu. Ar wahanol gyfnodau mewn hanes, ac ymysg gwahanol ddiwylliannau, siapiau crwm penodol wedi cael eu ffafrio ar gyfer y ffenestri a drysau o gestyll, eglwysi neu adeiladau pwysig eraill. Mae'r seiri coed a seiri maen a greodd adeiladau hyn yn defnyddio technegau geometrig safonol i drefnu'r cromliniau.

Ymysg y sgiliau ymarferol mwy datblygedig i fyfyrwyr gwaith coed yw ddulliau ar gyfer adeiladu fframiau drysau a ffenestri crwm o gynlluniau amrywiol. Mae'n rhaid i gael ei gynhyrchu fel templed mainc ar gyfer torri cydrannau pren dyluniadau. Fel enghraifft, gall myfyrwyr ymchwilio i'r dull adeiladu ar gyfer bwa Tuduraidd:

- Mae dau gylch yn cael eu lluniadu i greu'r lled ofynnol ar gyfer y bwa
- Mae sgwâr cael ei adeiladu, gyda'r pellter rhwng y canolau cylch fel un ochr
- Mae'r pwynt canol o'r ymyl CD ar waelod y sgwâr yn cael ei ddefnyddio fel canol ar gyfer adeiladu'r arcau uchaf i gwblhau'r bwa.



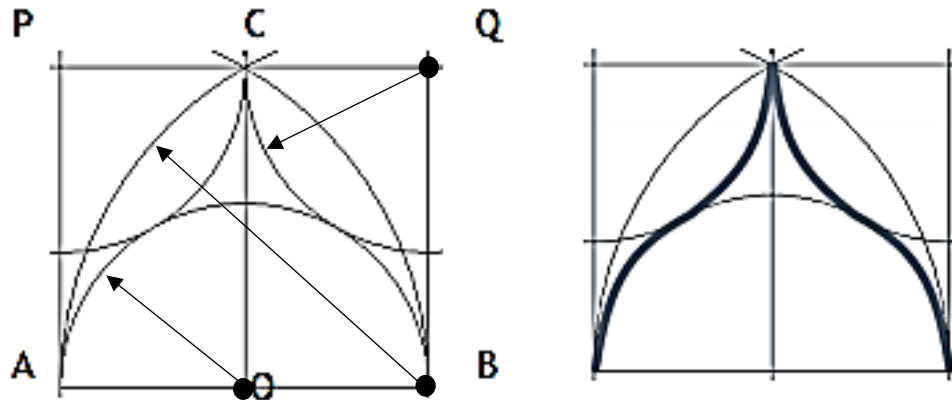
Ffigur 129: Lluniad geometregol ar gyfer bwa Tuduraidd



Ffigur 130: Bwa ogee

Siâp diddorol arall yw'r bwa ogee, neu fwa pigfain, fel y gwelir yn ffigur 130 uchod. Mae'r gwaith adeiladu geometrig yn defnyddio'r dilyniant canlynol:

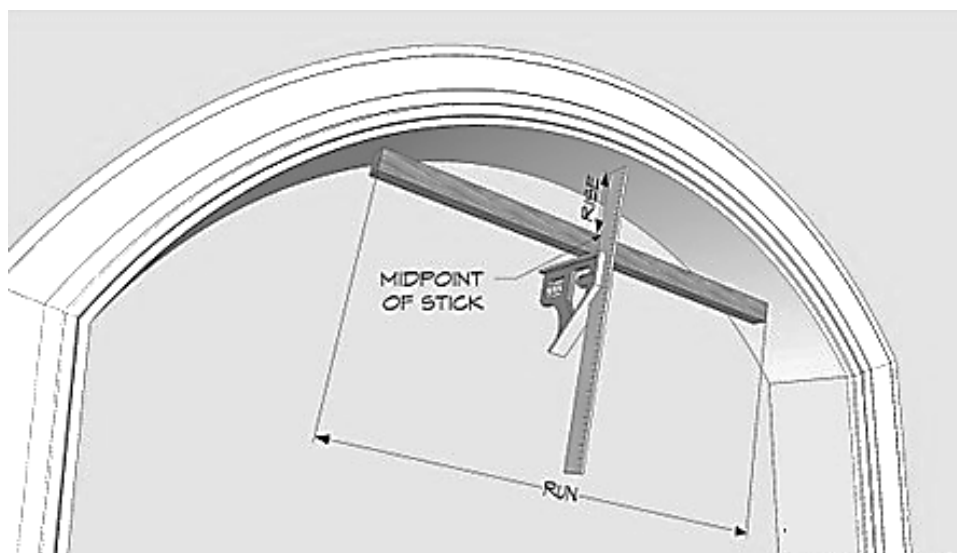
- Mae hanner cylch yn cael ei lunio a'i ganoli ar O i greu lled AB o'r bwa.
- Gan ddefnyddio'r diamedr AB yr hanner cylch, dwy arc yn cael eu tynnu o'r pwyntiau A a B fel eu bod yn croesi yn y man C.
- Mae petryal ABQP yn cael ei adeiladu, fel bod ymyl uchaf yn mynd drwy bwynt C.
- Mae arcau yn cael eu tynnu o P a Q, gan fynd trwy bwynt C, yn cyffwrdd yr hanner cylch is.



Ffigur 131: Lluniad geometregol fwa ogee

Gall myfyrwyr barhau trwy ymchwilio dyluniadau geometreg bwâu eraill fel prosiect.

Mae cymhwysiad ymarferol a defnyddiol o geometreg yw penderfynu ar y radiws o fwa crwn, er enghraifft pan fydd gwaith adnewyddu yn cael eu cyflawni.



www.thiscarpentry.com/2012/01/06/circular-based-arches-part-1/

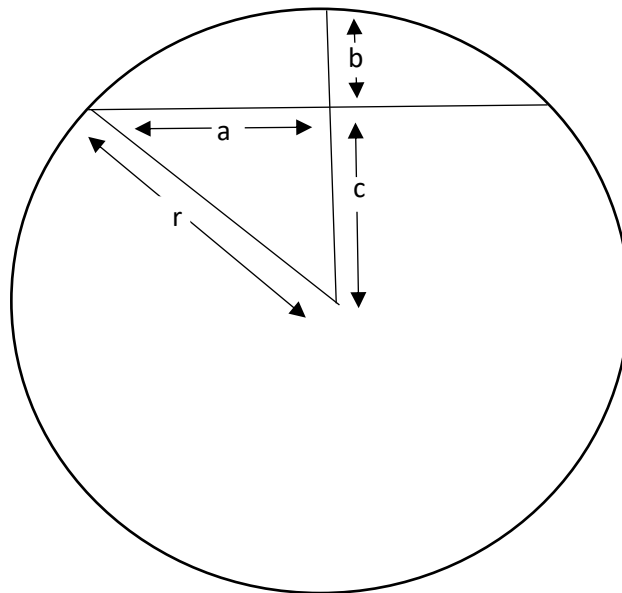
Ffigur 132: Techneg ar gyfer darganfod radiws bwa crwn

- Mae darn o bren yn cael ei fesur, a'i bwynt canol ei farcio. Mae hyd y pren yn cael ei gofnodi fel gwerth o'r enw RUN. Mae'r pren yn cael ei gosod fel bod ei ddau ben cyffwrdd y bwa.
- Mae sgwâr yn cael ei leoli ar bwynt canol y coed, ac yn cael ei ddefnyddio i fesur y pellter perpendicwlar o wyneb uchaf y coed i'r bwa. Mae hyn yn rhoi gwerth o'r enw RISE.

Yna gall radiws y bwa yn cael ei gyfrifo gan ddefnyddio'r fformiwla:

$$\text{radiws} = \frac{\left(\frac{\text{run}}{2}\right)^2 + \text{rise}^2}{2 \times \text{rise}}$$

Gellir mynegiant hwn ei gwirio yn y ffordd ganlynol:



Ffigur 133: Tarddiad fformiwla radiws y bwa

Gosod: radiws y bwa yn **r**

RUN y darn o bren yn **2a**

RISE yn **b**

Drwy theorem Pythagoras:

$$r^2 = a^2 + c^2$$

Ond:

$$r = b + c$$

Aildrefnu:

$$c = r - b$$

Yn amnewid ar ran c yn rhoi:

$$r^2 = a^2 + (r - b)^2$$

Ehangu'r term sgwâr:

$$r^2 = a^2 + r^2 - 2rb + b^2$$

Canslo r^2 $2rb = a^2 + b^2$

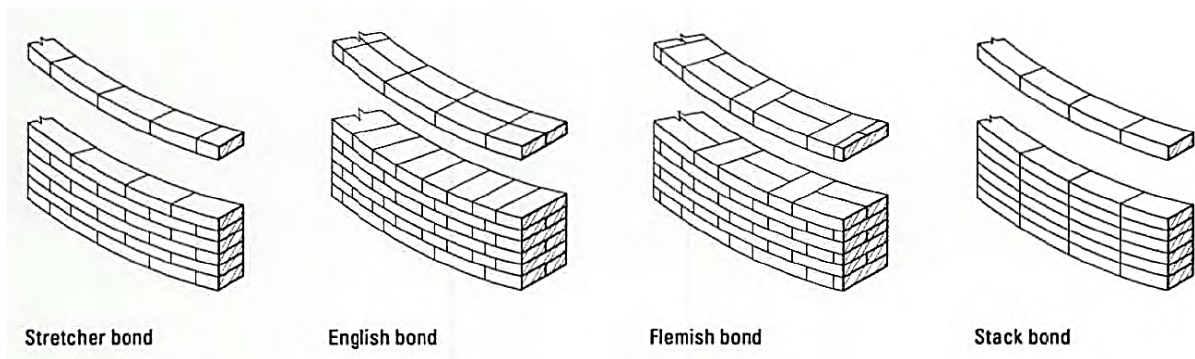
Felly: $r = \frac{a^2 + b^2}{2b}$

Amnewid: $run = 2a$, $rise = b$ yn rhoi:

$$radiws = \frac{\left(\frac{run}{2}\right)^2 + rise^2}{2 \times rise}$$

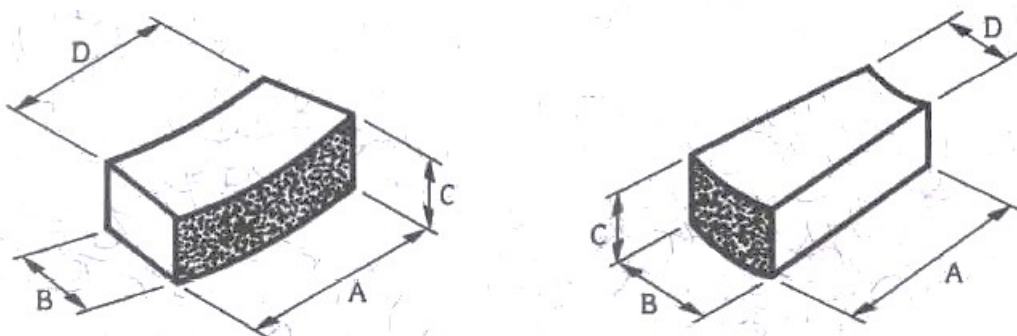
Mae cymhwysiad diddorol arall o geometreg gromlin mewn **gwaith brics**. Mae enghreifftiau'n cynnwys adeiladu waliau crwm ar gyfer tyrau, a waliau terfyn dolennog gwneud o baneli crwm lluosog. Efallai y bydd yr angen ymarferol i gyfrifo meintiau o ddeunyddiau ar gyfer gwaith brics crwm, ac i ddefnyddio technegau geometregol wrth drefnu cromliniau ar y safle.

Gall brics yn cael eu gosod gan ddefnyddio gwahanol fondiau, yn dibynnu ar drwch y wal fel bric sengl neu bric dwbl (Hammett a Morton, 1991):



Ffigur 134: Bondiau bric

Gall problemau godi os yw brics hirsgwar safonol yn cael eu defnyddio ar gyfer y waliau crwm o radiws bach, a brics arbenigol gydag wynebau crwm ar gael:



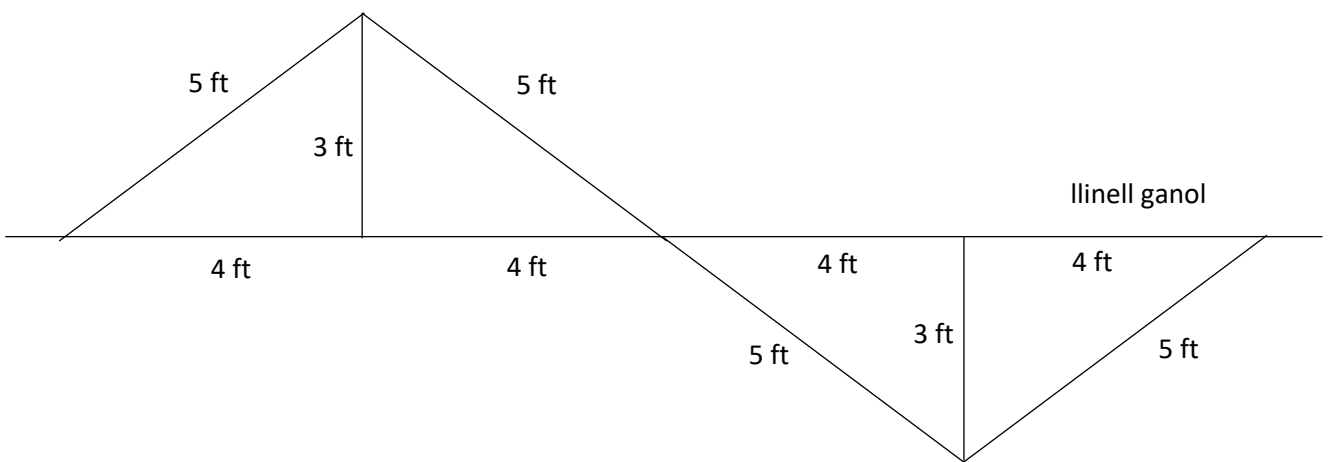
Ffigur 135: Brics crwm arbenigol: stretsier (chwith) a phennyn (ar y dde)

Gall waliau dolennog fod yn nodwedd arbennig o ddeniadol o gerddi. Reames (2012) yn trafod waliau serpentin a adeiladwyd yn y 1800au cynnar ym Mhrifysgol Virginia, UDA. Yn ddiddorol, dewiswyd y patrwm crwm fel modd o arbed arian. Mae gan wal grom mwy o sefydlogrwydd, fel y gall yn cael ei adeiladu gyda dim ond un trwch o frics, o gymharu â wal syth a fyddai'n gofyn am drwch dwbl neu bileri ychwanegwyd ar hyd y wal i'w cryfhau.



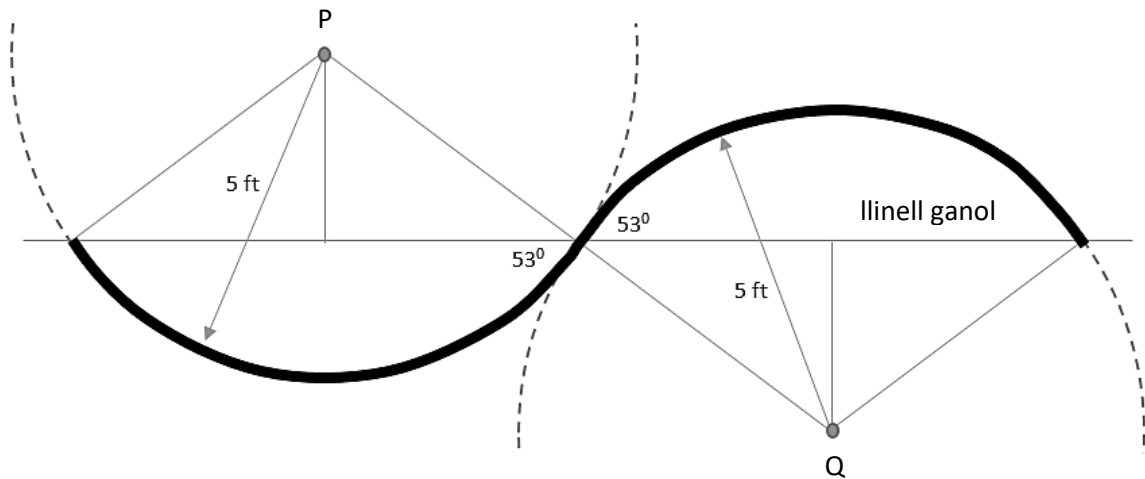
Ffigur 136: Wal serpentin

I drefnu wal serpentin, maen gofynnol i osod yn gywir canolau'r cromliniau olynol, ar y naill ochr i'r llinell ganol. Defnyddiwyd techneg syml ac ymarferol gan adeiladwyr ym Mhrifysgol Virginia i osod trionglau ongl sgwâr ar hyd llinell ganol y wal, gan ddefnyddio hydroedd o 3, 4 a 5 troedfedd:



Ffigur 137: Lluniad geometregol ar gyfer y wal serpentin

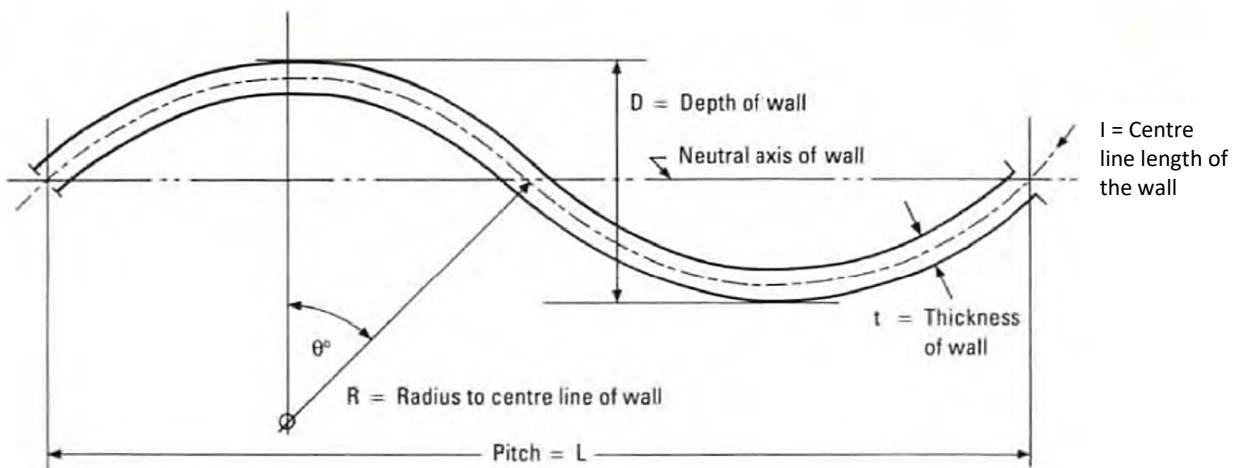
Gall yr arcau ar gyfer y llinell wal nawr yn cael ei threfnu drwy ddefnyddio llinyn 5 traed o hyd, gan ddefnyddio'r pwyntiau P a Q fel canolau. Gall y weithdrefn yn cael ei ailadrodd ar hyd llinell ganol y wal i gynhyrchu'r nifer angenrheidiol o faeau crwm.



Ffigur 138: Trefnu llinell y wal serpentin

Gellir ei ddangos gan drigonometreg bod pob cromlin y wal yn gwneud ongl o tua 53° gyda'r llinell canolrif. Gan fod onglau o ymagwedd yn gyfartal, bydd y wal yn ymddangos fel cromlin lyfn barhaus.

Yn yr achos cyffredinol, Hammett a Morton (1991) yn darparu fformiwlaŵ sy'n cysylltu'r radiws R , dyfnder D , traw L , hyd llinell ganol I , trwch t , ac ongl y crymedd Θ :



Ffigur 139: Paramedrau ar gyfer wal serpentin

$$L = 4 R \sin \Theta$$

$$I = 4 R \Theta, \text{ lle mae } \Theta \text{ yn cael ei fesur mewn radianau}$$

$$D = 2 R (1 - \cos \Theta) + t$$

Mae'n ddefnyddiol i fyfyrwyr adeiladu i ddatblygu taenlenni sy'n caniatáu i'r cyfrifiad hawdd y paramedrau sydd eu hangen yn ystod y broses o gynllunio a threfnu gwaith brics crwm. Am wal serpentin:

- Byddai'r trwch wal yn cael ei benderfynu gan y dull adeiladu a bond brics
- Byddai dyfnder y wal a'r traw'r gromlin yn cael ei adnabod o'r cynllun safle.

Yna gall radiws y gromlin yn cael ei gyfrifo. Mae'n bwysig bod radiws cywir yn cael ei ddefnyddio, er mwyn sicrhau bod rhannau crwm y wal yn ymdoddi yn llyfn heb unrhyw ddiffyg parhad onglog.

Cofnodi safleoedd archeoleg ddiwydiannol



Mewn cyrsiau amrywiol bydd angen i wneud arolygon cywir o ardaloedd o dir: er enghraifft, fesur proffil siâp a llethr safle adeiladu, neu fesur proffil croes o sianel afon mewn prosiect daearyddiaeth. Yn yr adran hon, rydym yn archwilio technegau arolygu gan ddefnyddio offer syml.

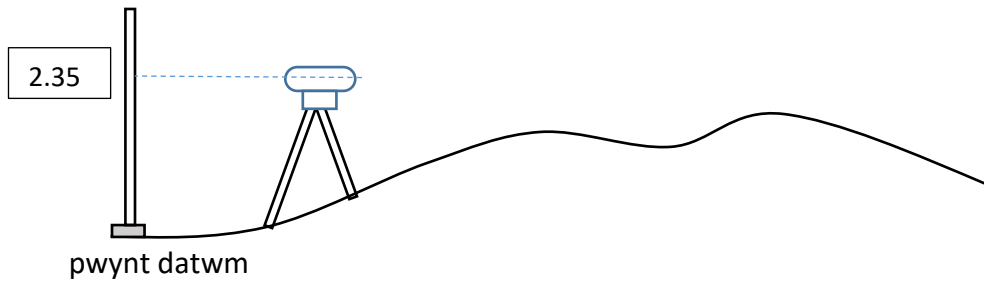
Gall **lefel** yn cael ei ddefnyddio i fesur newidiadau o uchder. Mae'r offeryn hwn yn caniatáu i'r syrfëwr nodi pwynt ar staff graddio ar yr un uchder ag echel y telesgop gwyllo.



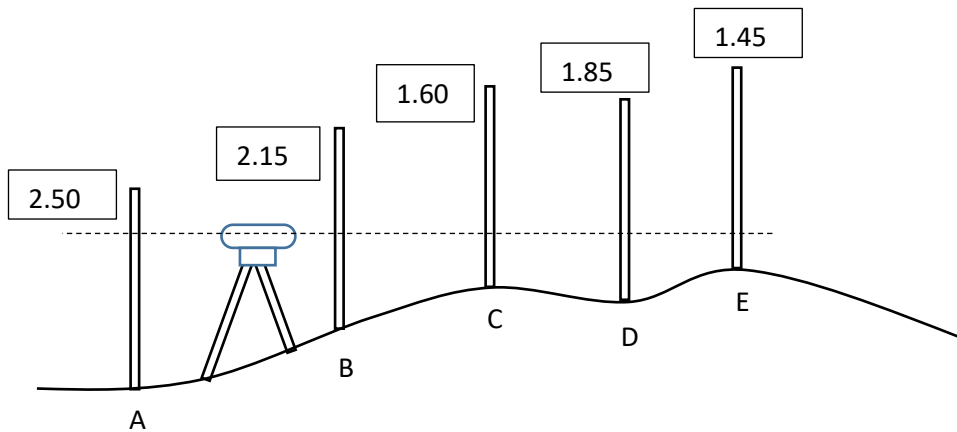
Ffigur 140: Lefel arolwg a staff graddiodd

Mae'r arolwg yn dechrau drwy ddewis pwynt cyfeirnod cadarn y gellir ei ddefnyddio fel datwm, gan fod pob mesuriadau uchder yn cael eu cysylltu. Gallai'r datwm, er enghraifft, bod ben wal frics neu glogfaen mawr.

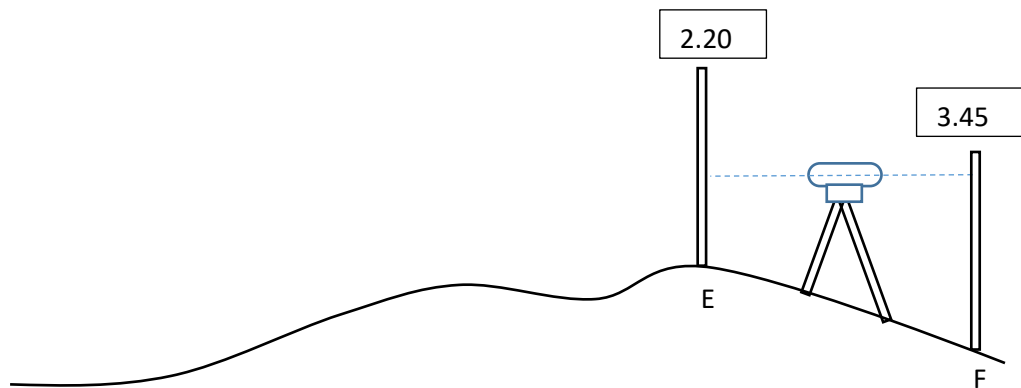
Mae'r lefel yn cael ei sefydlu ar ei thrybedd. Mae'r staff graddedig yn cael ei leoli gyda'i gwaelod ar y pwynt datwm, a darlenniad uchder yn cael ei wneud.



Yna gall cyfres o bwyntiau pellach yn cael eu harolygu. Ym mhob achos, mae'r darlenniad uchder ar y staff yn cael ei gofnodi.



Ar ryw adeg, gall fod yn angenrheidiol i symud y lefel i leoliad newydd. Pan wneir hyn, dylid mesur uchder y pwynt blaenorol. Bydd hyn yn caniatáu i gyfrifo uchder cymharol y llinellau golwg ar gyfer y gwahanol leoliadau'r lefel. Yna gellir pwyntiau pellach yn cael eu harolygu.



Ffigur 141: Dilyniant o fesuriadau yn ystod arolwg gan lefelu

Mae'n bwysig fod ganlyniadau'r arolwg yn cael eu cofnodi yn systematig fel nad oes unrhyw wallau eu gwneud wrth brosesu'r data. Mae fformat tabl wedi cael ei ddatblygu ar gyfer cofnodi data lefelu (University of Manchester, 2016), fel y dangosir yn ffigur 142.

Darlleniadau ar gyfer yr arolwg enghreifftiol yn cael eu dangos:

Ôl-olwg	Canolradd	Blaen-olwg	Cynnydd	Cwyp	Level gostwng	Pellter	Sylwadau
2.35						6.3	datwm
	2.50					8.4	pwynt A
	2.15					7.9	pwynt B
	1.60					9.2	pwynt C
	1.85					8.3	pwynt D
2.20		1.45				6.9	pwynt E
		3.45				10.4	pwynt F

Ffigur 142: Data maes ar gyfer yr arolwg lefelu

Ym mhob lleoliad o'r lefel, mae'r darlleniad cyntaf a gymerwyd yn cael ei alw yn **ôl-olwg**. Y darlleniad olaf cyn i'r lefel yn cael ei symud i leoliad nesaf ydy'r **blaen-olwg**. Unrhyw ddarlleniadau ychwanegol a gymerir tra bod y lefel mewn lleoliad penodol yn cael eu cofnodi fel **darlleniadau canolradd**.

Mae pob rhes yn y tabl yn cyfeirio at bwynt arolwg penodol. Mae uchder pwynt E yn cael ei fesur ddwywaith, yn ogystal â'r lefel mewn lleoliadau eraill ar hyd y llinell trawslun. Mae uchder blaen-olwg ac ôl-olwg pwynt E yn cael eu cofnodi.

Mae'r pellteroedd rhwng pwyntiau arolwg olynol ar hyd y llinell trawslun yn cael eu mesur gan dâp a'u cofnodi yn y golofn **pellter**.

Yna gall y data gael ei brosesu i benderfynu ar uchder gwirioneddol y pwyntiau arolwg. Byddwn yn cymryd yn ganiataol bod y pwynt datwm yw ar uchder o 100m uwchben lefel y môr. Mae'r ôl-olwg ar y pwynt datwm rhoi darlleniad staff o 2.35m.

Ôl-olwg	Canolradd	Blaen-olwg	Cynnydd	Cwyp	Level gostwng	Pellter	Sylwadau
2.35					100.00	6.3	datwm
	2.50			0.15	99.85	8.4	pwynt A
	2.15		0.35		100.20	7.9	pwynt B
	1.60		0.55		100.75	9.2	pwynt C
	1.85			0.25	100.50	8.3	pwynt D
2.20		1.45	0.40		100.90	6.9	pwynt E
		3.45		1.25	99.65	10.4	pwynt F

Ffigur 143: Cyfrifo drychiadau'r pwyntiau arolwg

Roedd y pwynt arolwg cyntaf A yn arddangos darlleniad uchder o 2.50m. Mae gwahaniaeth o 0.15m mewn uchder o'i gymharu â'r ôl-olwg ar y pwynt datwm. Darlleniad mwy o faint ar y staff mesur cynrychioli lefel dir is, felly mae'r ffigur hwn yn cael ei gofnodi yn golofn **cwyp** o'r tabl. Gwneud cais gostyngiad o 0.15m i uchder datwm yn rhoi drychiad newydd o 99.85m, sy'n cael ei gofnodi yn y golofn **level gostwng** ar gyfer pwynt A.

Cafwyd pwynt B ei arolwg nesaf. Mae'r darlleniad staff yn 2.15m, o gymharu â darllen 2.50m ar gyfer y pwynt A blaenorol. Mae hyn yn cynrychioli gwahaniaeth mewn uchder o 0.35m, ond y tro hwn y tir wedi codi rhwng pwyntiau arolwg. Y canlyniad yn cael ei gofnodi yn y golofn **cynnydd**, ac yn cymhwyso at y drychiad blaenorol bwynt A i gael y gwerth ar lefel gostwng newydd o 100.20m.

Mae'r cyfrifiad yn parhau yn yr un ffordd i fyny i bwynt E, lle mae newidiwyd lleoliad y lefel. Rydym yn dechrau cyfres newydd o gyfrifiadau ar bwynt F. Y darlleniad staff o 3.45m yn F yn cael ei gymharu â'r darlleniad ôl-olwg ar bwynt E o 2.20m, yn dangos gostyngiad o 1.25m. Gall y gwahaniaeth hwn yn cael ei dynnu o'r lefel gostwng ym mhwynt E i gael y drychiad newydd ar bwynt F.

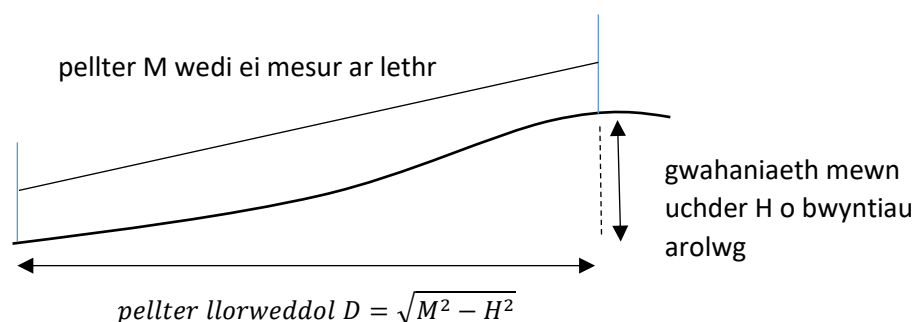
Unwaith bydd pob drychiadau wedi cael eu cyfrifo, gall proffil y ddaear yn cael ei phlotio gan ddefnyddio mesur o'r pellter llorweddol rhwng y pwyntiau arolwg.

Mae'r dechneg lefelu a ddisgrifir uchod yn addas ar gyfer cael proffil ddaear ar hyd llinell trawslun sengl: er enghraifft, ar draws traeth a system dwyni dywod mewn astudiaeth geomorffoleg arfordirol. Yn aml, fodd bynnag, mae angen gynhyrchu cynllun neu fap cywir o ardal tir. Ar gyfer hyn, y dechneg o **driongli** yn addas.

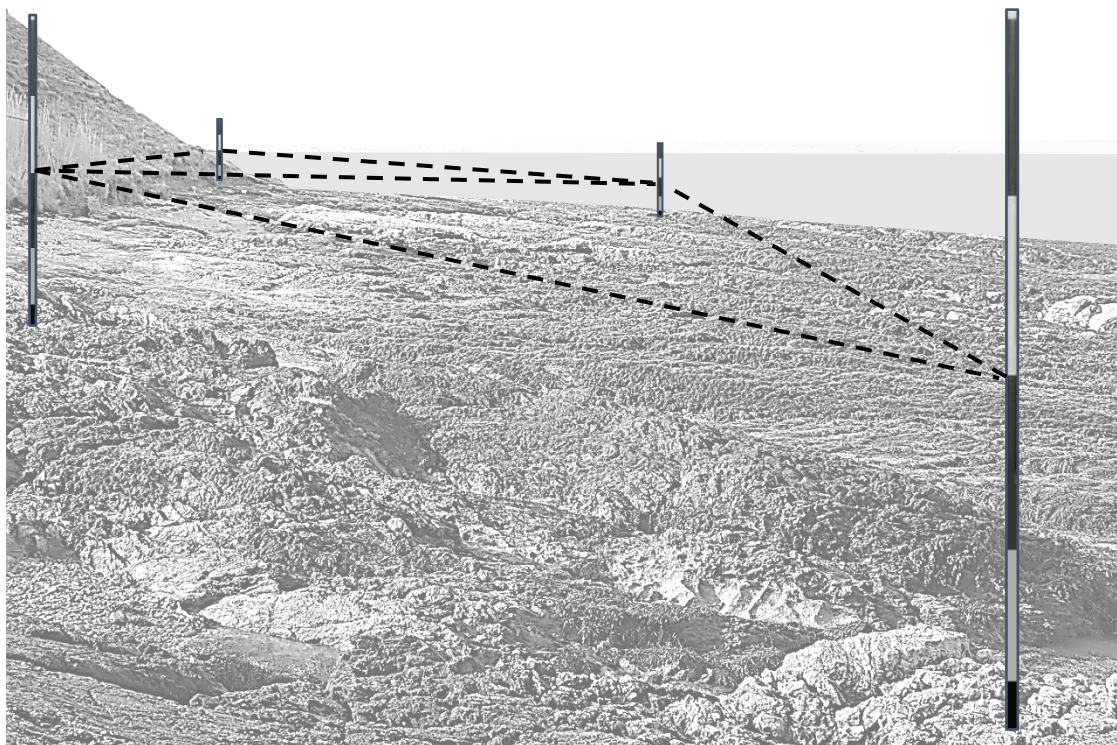
Mae'r ardal mapio yn cael ei farcio allan fel cyfres o drionglau mawr gan ddefnyddio polion tîrfesur, fel yn yr arolwg traeth a ddangosir yn ffigur 145. Mae ochr un triongl yn cael ei gymryd fel **llinell sylfaen**, ac mae ei chyfeiriant cwmpawd yn cael ei fesur. Bydd hyn yn caniatáu i'r map terfynol i'w cyfeiriadu yn gywir.

Mae pellteroedd yn cael eu mesur rhwng y pwyntiau arolwg gyda thâp, yn cadw'r tâp ar yr un uchder uwchben y ddaear ar bob pwynt. Mae uchder pob pwynt arolwg yn cymharu â datwm drwy ddefnyddio lefelu, gyda'r dull a ddisgrifiwyd yn gynharach yn yr adran hon.

Lle mae newidiadau o uchder yn digwydd rhwng pwyntiau arolwg, roedd y pellter llorweddol ei gyfrifo drwy ddefnyddio theorem Pythagoras:

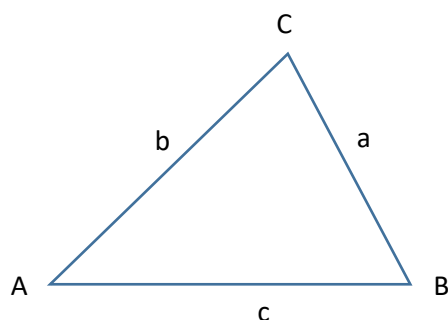


Ffigur 144: Cyfrifo'r pellteroedd llorweddol rhwng pwyntiau arolwg



Ffigur 145: Dull triongli ar gyfer mapio traeth

Gall onglau triongl yn awr yn cael ei gyfrifo, i helpu i blotio cynllun graddfa neu fap o'r ardal arolwg. Os bydd hydoedd y tair ochr o'r triongl wedi eu gwybod, gall yr onglau cael eu cyfrifo drwy ddefnyddio'r rheol cosin. Wrth labelu ochrau'r triongl fel **a**, **b** a **c**, ac yr onglau gyferbyn **A**, **B** a **C**:



wedyn:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

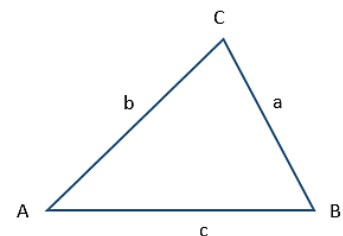
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Ffigur 146: Defnydd o'r rheol cosin i ddod o hyd i'r onglau triongl gyda hydoedd diffiniedig o ochrau

Mae'n gyfleus i sefydlu taenlen fel gall onglau yn cael ei gyfrifo yn uniongyrchol o'r pellteroedd wedi eu mesur ar lethr, ac uchderau'r pwyntiau arolwg.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		triangle corner	survey point name	elevation (m)	angle (degrees)					
3	A		point 9	23.67	100.3					
4	B		point 11	31.49	50.0					
5	C		point 12	28.23	29.7					
6				angle total:	180.0					
7										
8		triangle side	distance (m)	change in height (m)	horizontal distance (m)					
9	a		19.56	-3.26	19.29					
10	b		15.22	4.56	14.52					
11	c		9.86	7.82	6.01					
12										



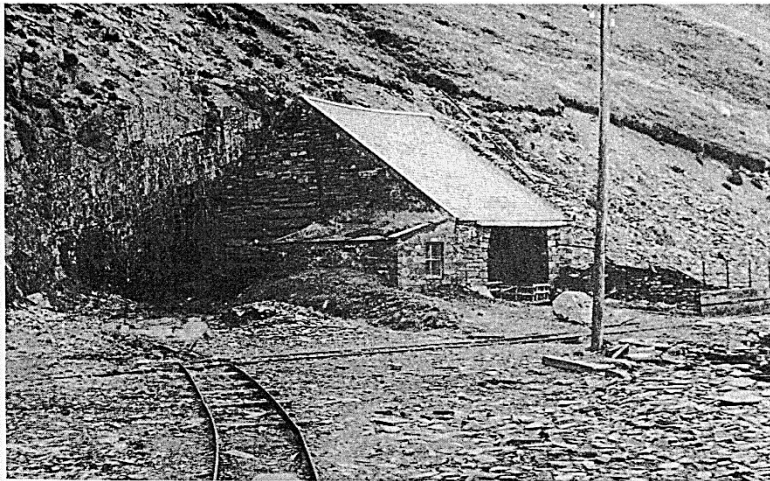
Fformiwlaù:

	A	B	C	D	E
1					
2		triangle corner	survey point name	elevation (m)	angle (degrees)
3	A		point 9	23.67	=ACOS(((C10*C10)+(C11*C11)-(C9*C9))/(2*C10*C11))*180/PI()
4	B		point 11	31.49	=ACOS(((C9*C9)+(C11*C11)-(C10*C10))/(2*C9*C11))*180/PI()
5	C		point 12	28.23	=ACOS(((C9*C9)+(C10*C10)-(C11*C11))/(2*C9*C10))*180/PI()
6				angle total:	=SUM(E3:E5)
7					
8		triangle side	distance (m)	change in height (m)	horizontal distance (m)
9	a		19.56	=D5-D4	=SQRT(C9*C9-D9*D9)
10	b		15.22	=D5-D3	=SQRT(C10*C10-D10*D10)
11	c		9.86	=D4-D3	=SQRT(C11*C11-D11*D11)
12					

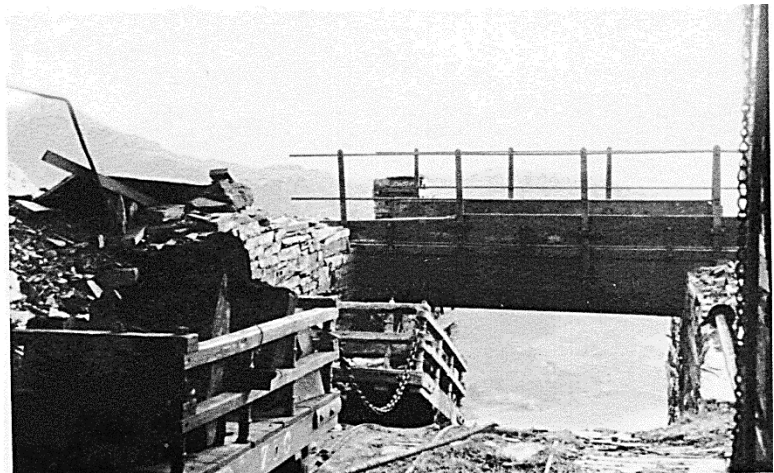
Ffigur 147: Taenlen ar gyfer prosesu data triangli

Fel enghraifft o'r defnydd o dirfesur, rydym yn disgrifio dau brosiect a gynhaliwyd gan aelodau o gwrs archaeoleg ddiwydiannol. Yn y cyntaf, cafodd arolwg ei gynnal i gofnodi manylion hen drwm weindio oedd yn gweithio inclein gan ddisgyrchiant yn chwarel lechi Dinorwig, Llanberis. Mae'r tŷ drwm a ddewiswyd ar gyfer y prosiect, ar ben y llethr C5, yn awr mewn cyflwr adfeiliedig, ond mae llawer o'r peiriannau yn parhau i fod yn ei le, a gellir eu mesur a thynnu lluniau.

Mae hen luniau (Carrington, 1994) yn dangos y tŷ drwm ac inclein, tua diwedd y cyfnod pan oedd yn cael ei ddefnyddio (ffigur 148). Mae'r adeilad yn cynnwys drwm mawr bren gyda chebl dur ei ddirwyn arno. Gallai tryciau o lechi yn cael eu ynghlwm wrth un pen o'r cebl, yna gostwng i lawr y llethr drwy ryddhau'r brêc ar y drwm. Ar yr un pryd, byddai'r ben arall y cebl yn cael ei ddirwyn yn ôl ar y drwm, tynnu tryciau gwag i fyny'r llethr yn y broses.

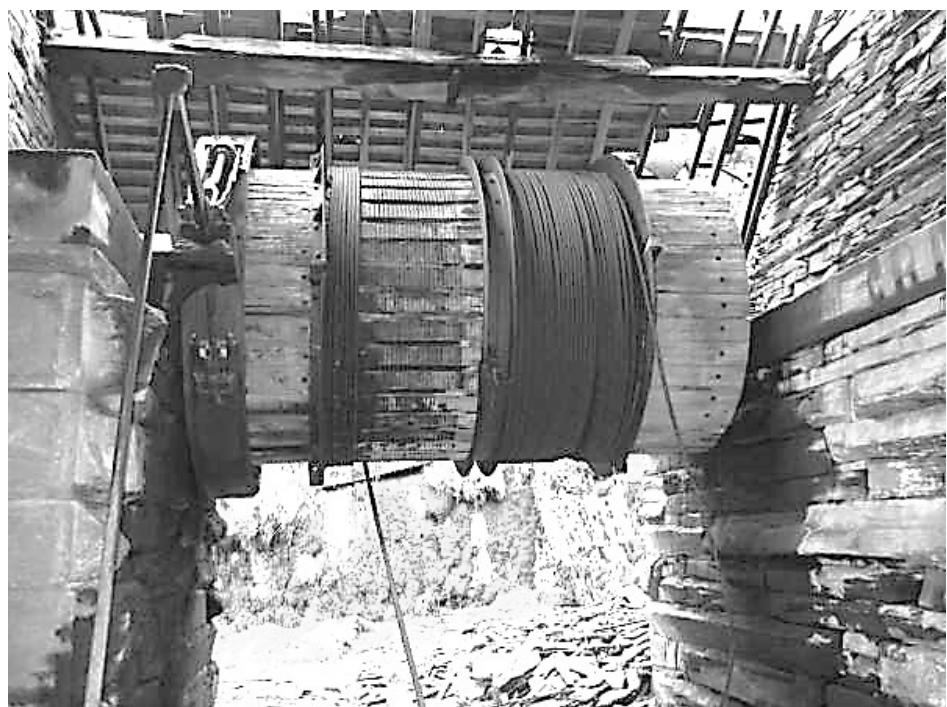


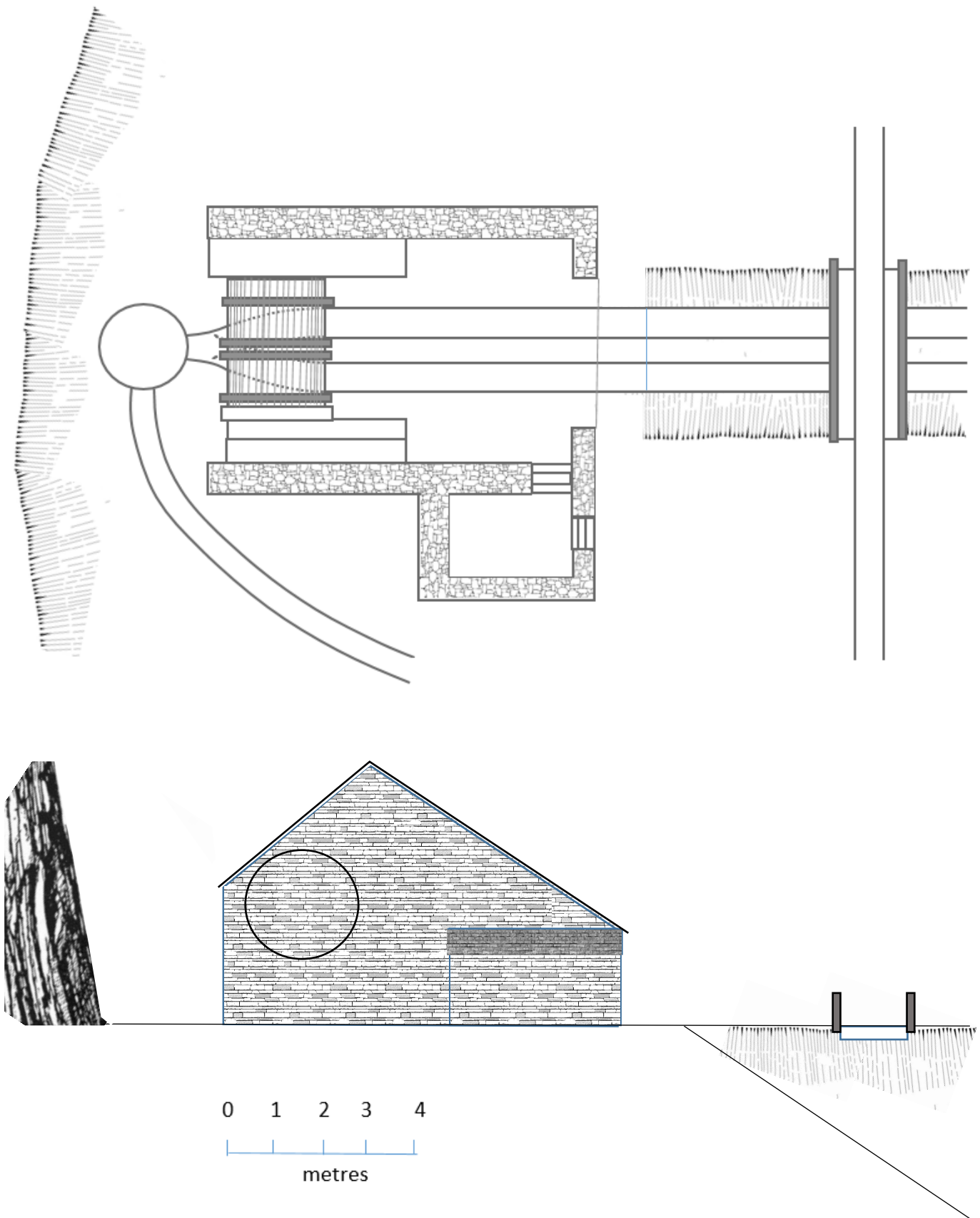
Ffigur 148:
Drwm dirwyn, chwarel Dinorwig



Cafwyd arolwg cychwynnol o'r safle ei wneud gan lefelu a driongli, fel y gallai cynlluniau a gweddluniau yn cael eu lluniadu (ffigur 150). Cafwyd manylyn o'r peiriannau ei fesur yn y fan a'r lle, gyda dimensiynau ychwanegol a gafwyd o gyfres o ffotograffau a dynnwyd o safleoedd gwahanol, fel yn ffigur 149. Lle y gallai benderfynu ar gynlluniau elfennau coll o'r adeilad neu beiriannau, roedd y rhain yn cael eu hychwanegu at y lluniadau.

Ffigur 149:
Drwm dirwyn a mecanwaith brêc





Ffigur 150: Cynllun a drychiad y drwm dirwyn C5, chwarel Dinorwig

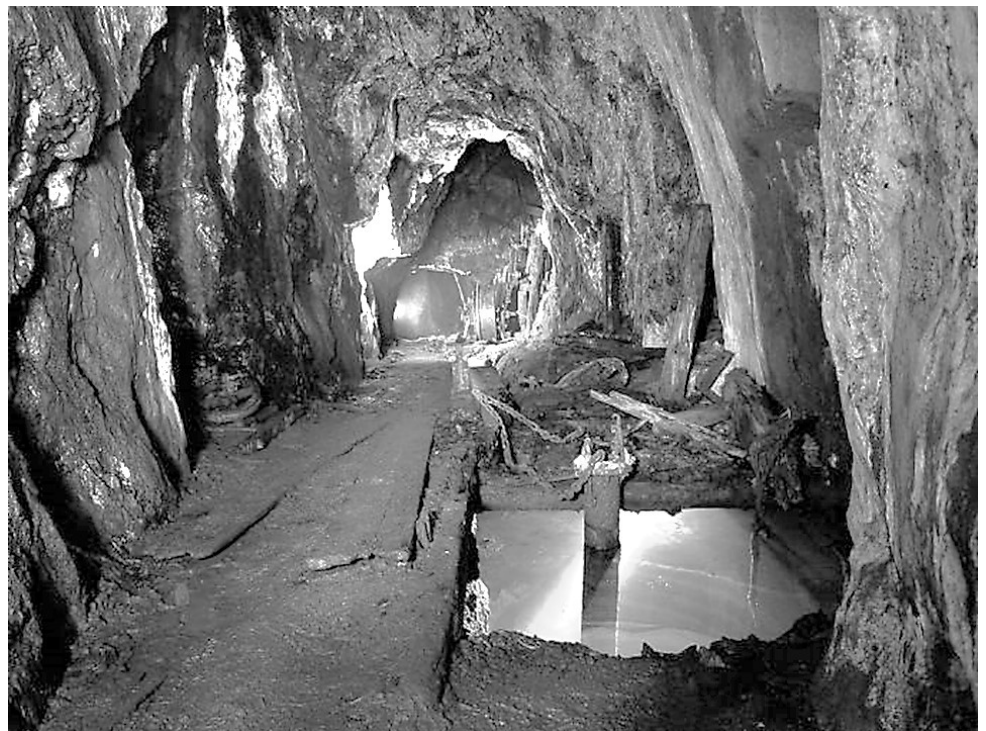
Mae'r ail brosiect archeoleg ddiwydiannol yn ymwneud a mapio twneli ac olwyn ddŵr unigryw o dan ddaear yng ngwaith plwm Ystrad Einion ger Machynlleth yng nghanolbarth Cymru. Agorodd y pwll bychan yn 1877, ac wedi gweithredu dim ond tua 20 mlynedd (Bick, 1976), ond oedd yn cyfarparu gyda rhai o dechnoleg mwyngloddio fwyaf modern o'r amser.

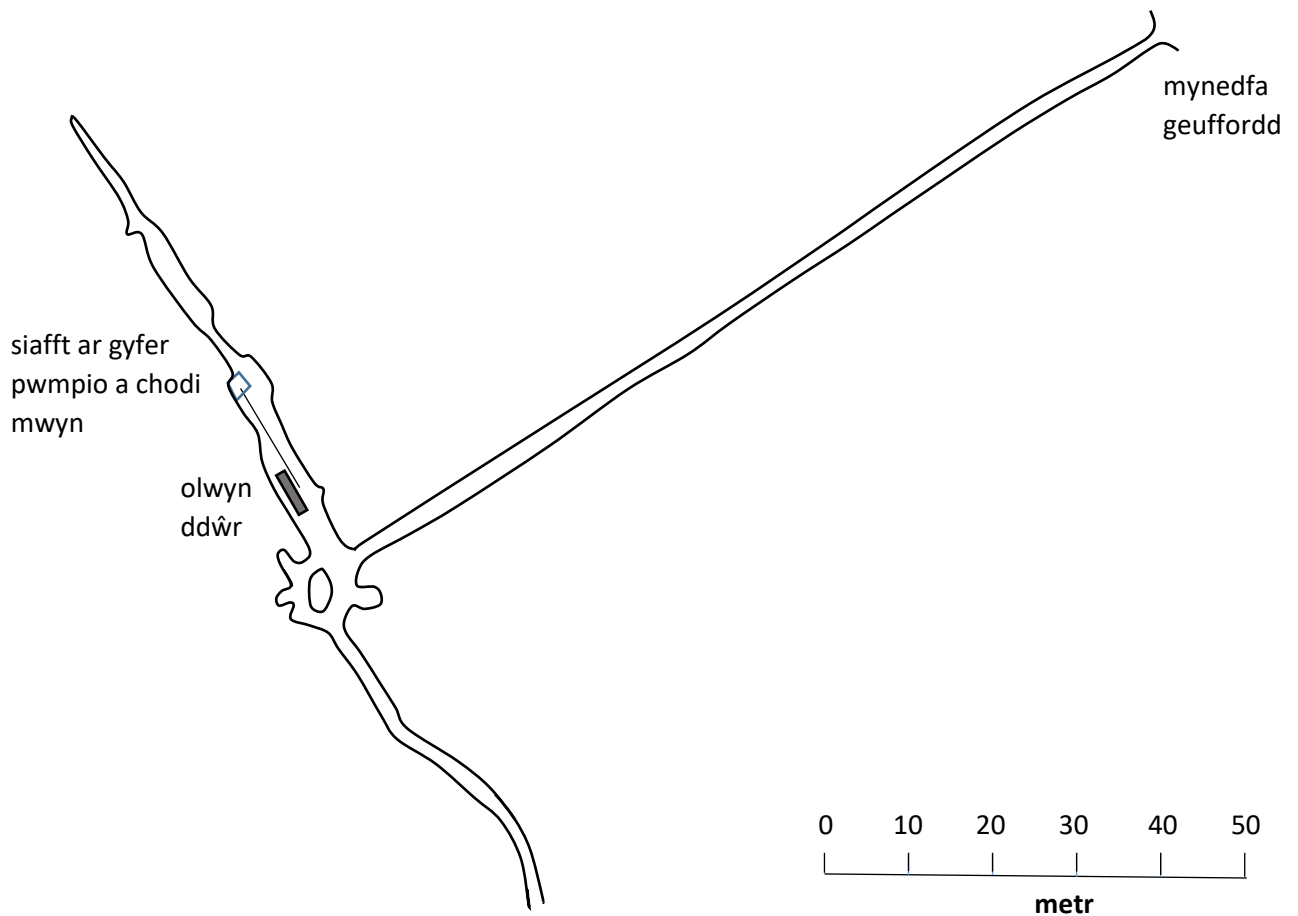
Gwnaeth y grŵp arolygiad o'r twnnel geuffordd a siambrau ar y lefel Rhif 3. Mae cynllun a gynhyrchwyd gan gyfuniad o drionglant a mesur cyfeiriannau cwrmpawd (ffigur 153).



Ffigur 151:
Twnnel geuffordd sy'n arwain at yr olwyn ddŵr o dan y ddaear.

Ffigur 152:
Siafft gorlifwyd â thiwb pwmp a gweddillion pen ffrâm ar gyfer tynnu mwyn i fyny o'r gweithfeydd is. Mae'r olwyn ddŵr yn y siambr yn y pellter.





Ffigur 153: Cynllun o weithfeydd ar y lefel rhif 3, mwynglawdd Ystrad Einion

Y brif nodwedd o ddiddordeb yn y mwynglawdd yw'r olwyn ddŵr o dan ddaear, 16 troedfedd mewn diamedr, wedi ei chadw'n dda (ffigur 154). Mae'r olwyn a ddarperir pŵer symud ar gyfer swyddogaethau deublyg o bwmpio dŵr o'r lefelau is, a chodi bwcedi o fwyn plwm. Dŵr yn cael ei gyflenwi i'r olwyn drwy gafn pren o lefel uwch y pwll. Roedd dŵr draenio a dŵr rhyddhau o'r olwyn yn llifo allan o'r pwll trwy'r twnnel fynedfa.

Cafwyd yr olwyn ddŵr ei fesur yn ei lle gan ddefnyddio tâp a staff arolygu raddio, gan wneud brasluniau i ddangos lleoliad y dimensiynau a gofnodwyd. Mae nifer o luniau cafodd eu tynnu o'r peiriannau o wahanol gyfeiriadau. Roedd rhai cydrannau wedi eu dadgydosod neu a oedd ar goll, ond aelodau'r grŵp yn gallu defnyddio eu gwybodaeth o beirianeg fecanyddol i ddiddwytho'r dulliau gweithredu.

Roedd yr olwyn ddŵr yn troi i gyfeiriad gwrthglocwedd wrth edrych arno o'r tu blaen. Mae'r olwyn ei hun wedi ei hadeiladu o segmentau haearn yn cysylltu â'r echel ganolog gan freichiau pren. Mae'r platiau segment yn dal bwcedi pren yr olwyn. Mae'r strwythur cyfan yn cael ei chynhalydd ar drestl pren cadarn.

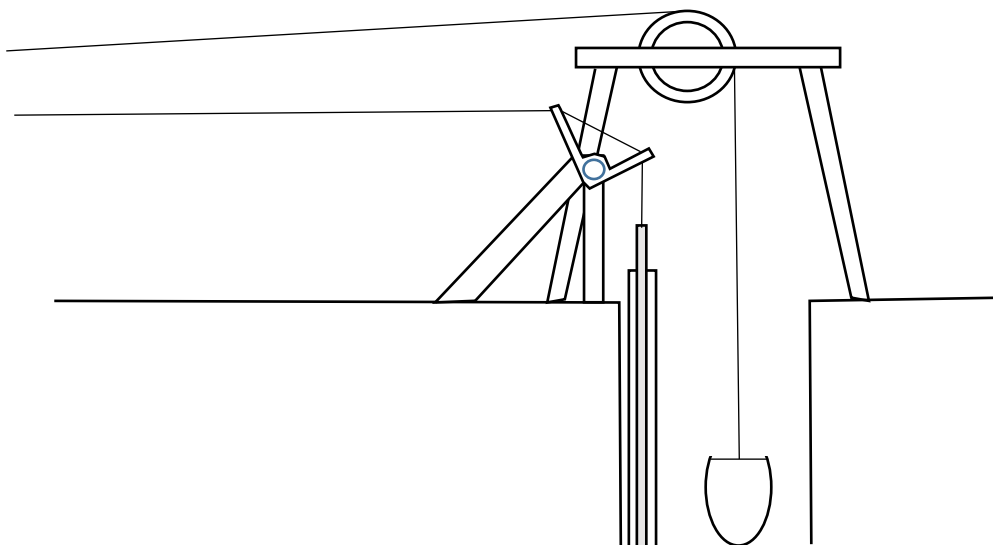


Ffigur 154:

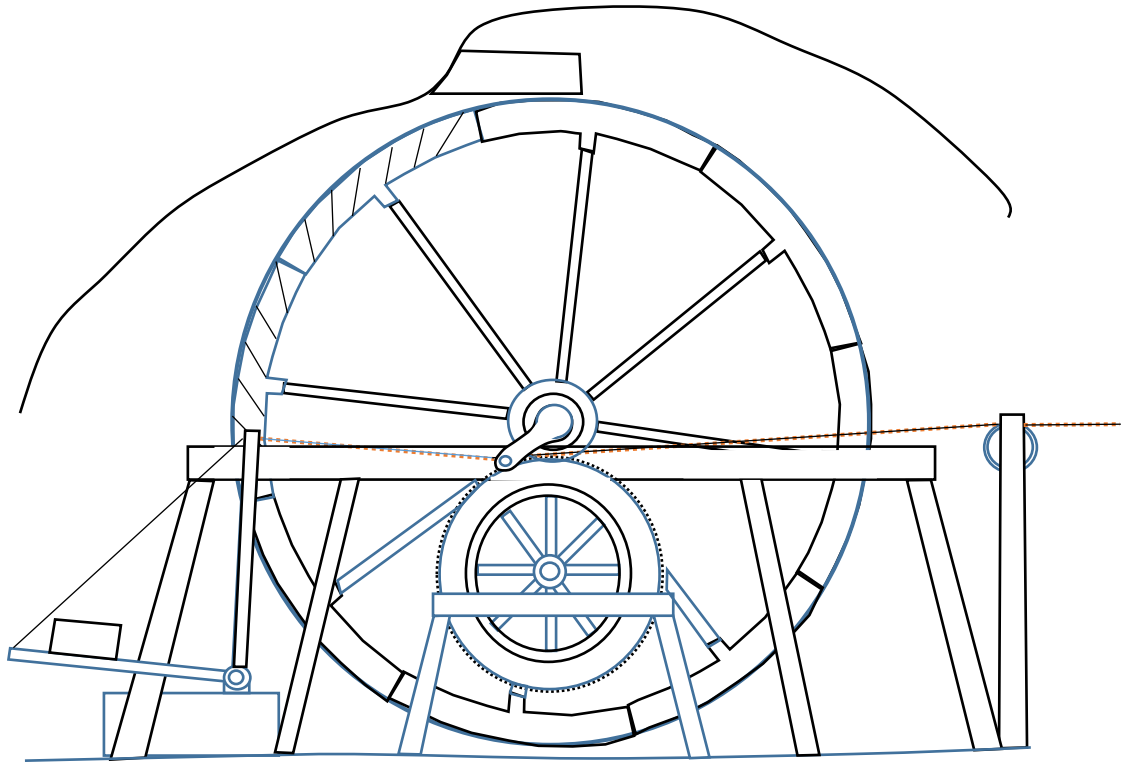
Olwyn ddŵr tanddaearol, mwynglawdd Ystrad Einion. Y drwm weindio am godi mwyn yn cael ei weld ar y chwith, a chafodd ei bweru gan yr olwyn gêr mawr. Mae crank ynghlwm wrth yr olwyn ddŵr yn gysylltiedig gan gadwyn i rodenni pwmp yn y siafft pwll.

Gwnaeth yr olwyn ei swyddogaeth bwmpio drwy crank gylchdroi ynghlwm wrth y brif echel. Mae'r crank ddarperir mudiant cilyddol ar gyfer cadwyn, a oedd yn pasio dros bwlliau i fraced ongl uwchben y siafft pwll. Mae hyn yn trosi'r mudiant i rym fertigol ar gyfer weithredu rhodenni pwmp yn y siafft.

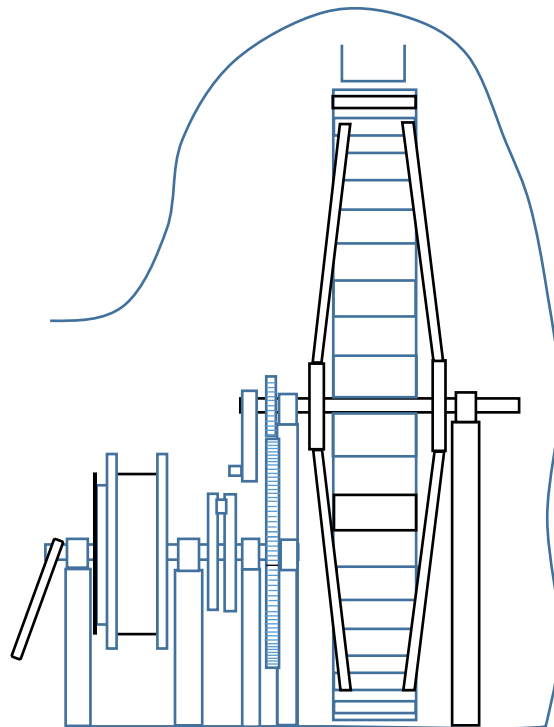
Mae drwm weindio gan yr olwyn ddŵr i gludo bwcedi o fwyn i fyny'r siafft. Mae'r drwm yn ei bweru gan erio leihau o'r olwyn ddŵr. Mae mecanwaith yn caniatáu gyrru'r drwm yn cael ei dechrau a stopio drwy symud y siafft drwm i'r ochr i ymgysylltu neu ymddieithrio clustiau fetel ar blât cydiwr. Mae brêc band metal ei osod o amgylch ymyl y drwm weindio.



Ffigur 155: Trefniant o siafft bwmpio a chludo



1 metr

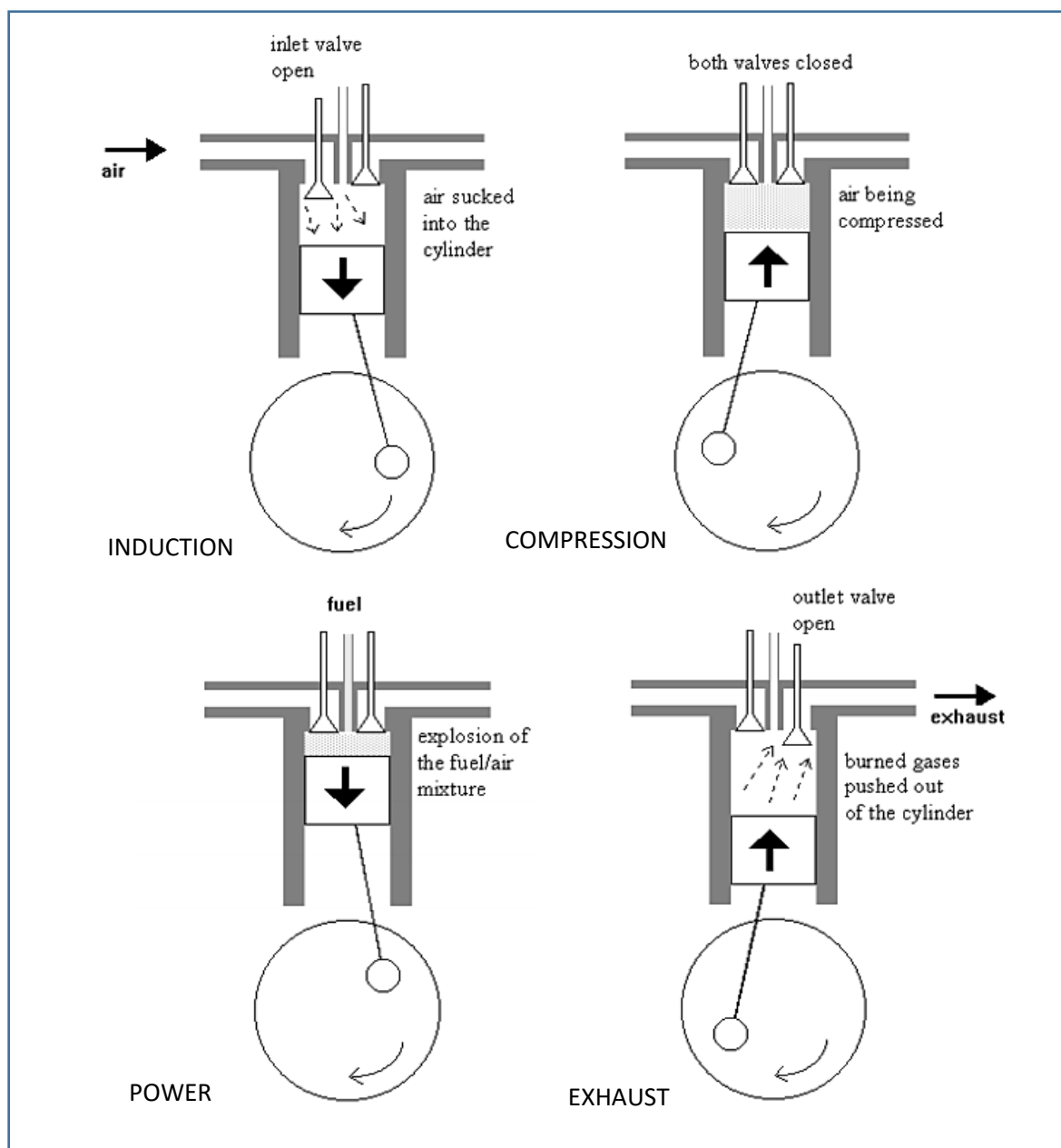


Ffigur 156: Olwyn ddŵr tanddaearol ym mwynglawdd Ystrad Einion

Cylchdroi peiriant

Mae cymhwysiad pwysig o rifedd yw cynhyrchu ddyluniadau drwy gymorth cyfrifiadur ar gyfer peiriannau, yn aml gan ychwanegu animeiddiad i ddangos mudiant cydrannau'r peiriant. Yn adrannau olaf y bennod hon, byddwn yn archwilio rhai o'r technegau mathemategol i gynrychioli gwrthrychau mewn rhaglenni cyfrifiadurol ac ar gyfer ddangos symudiad.

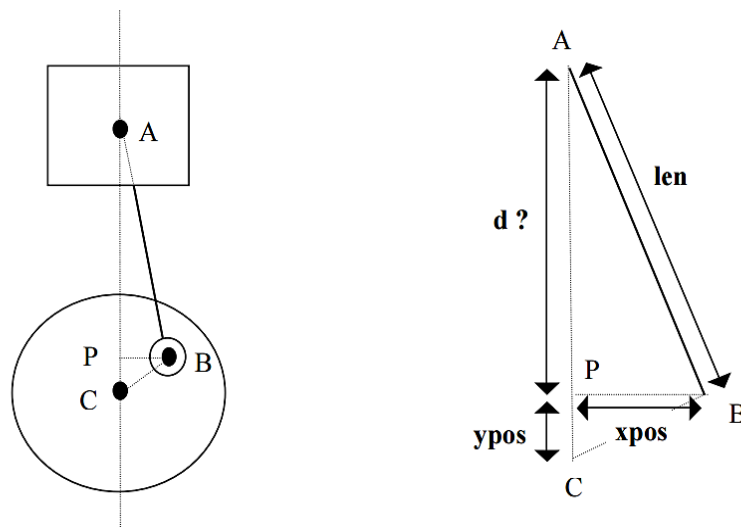
Mewn dau ddimensiwn, gall pwynt yn cael ei leoli gan ei gyfesuryn-x llorweddol a'i gyfesuryn-y fertigol. Gall siapiau geometrig yn cael ei nodi gan gyfuniad o gyfesurynnau, er enghraifft: y lleoliad canolig a radiws ar gyfer cylch, neu leoliadau gornel triongl neu betryal. Fel enghraifft o gymhwysiad graffeg dau ddimensiwn, byddwn yn ystyried sut y gallai animeiddiad o injan diesel yn cael ei gynhyrchu mewn rhaglen gyfrifiadurol.



Ffigur 157: Cylchred gweithredu ar gyfer injan diesel

Mae'r cylchred gweithredu ar gyfer injan diesel yn cael ei ddangos yn y ffigur 157. Mae'r piston yn y silindr yn gysylltiedig â'r siafft crank cylchdroi gan y rhoden gyswllt. Mae falf mewnbwn yn caniatáu i aer fynd i mewn i'r silindr ar ddechrau'r gylchred. Mae'r aer yn cael ei gywasgu, tanwydd ei chwistrellu a'r gymysgedd yn tanio. Mae ymledu nwyon yn gyrru'r piston i lawr yn ystod y strôc pŵer, yna bydd y falf gwacáu yn agor er mwyn caniatáu i'r nwyon llosg i ddianc. Yna bydd y cylchred yn cael ei ailadrodd.

I ddatblygu animeiddiad dau ddimensiwn o'r injan, rhaid i'r dimensiynau sefydlog y cysylltiad yn cael ei nodi yn gyntaf. Bydd symudiad y piston yn dibynnu ar y radiws cylchdro o'r beryn rhoden gyswllt B, a hyd y rhoden gyswllt AB.



Ffigur 158: Geometreg mudiant yr injan diesel

Gall animeiddiad yn cael ei gynhyrchu drwy arddangos y piston a rhoden gyswllt am ffracsiwn o eiliad ar bob ongl olynol gan fod y crancsiafft yn cylchdroi. Yna bydd y piston a rhoden gyswllt yn cael eu hail-lunio yn y lleoliad nesaf.

Bydd yr ongl cylchdroi yn cael ei fesur mewn graddau clocwedd o'r echelin-x positif. Yna gall cyfesurynnau'r rhannau symudol yn cael ei gyfrifo gan ddefnyddio geometreg a thrigonometreg.

Mae'r llinell ganol fertigol yr injan cx a'r llinell ganol lorweddol y chwylofwyn yn ffurfio'r tarddbwynt ar gyfer y system gydlyn, fel y dangosir yn ffigur 158.

Cymryd radiws gylchdroi'r cranc fel r , a hyd y rhoden gyswllt fel l , yna am unrhyw ongl cylchdroi θ gallwn gyfrifo $xpos$ a $ypos$ ar gyfer y beryn cranc:

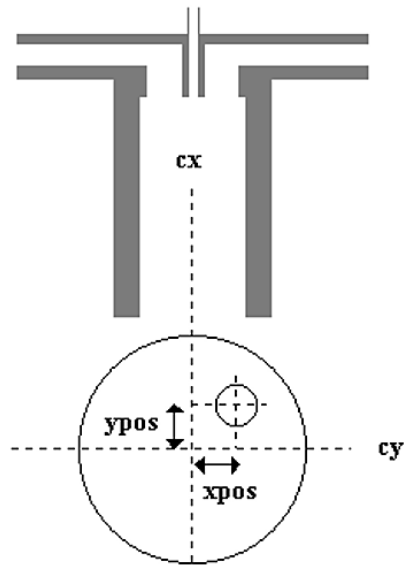
$$xpos = cx + r \cos \theta$$

$$ypos = cy + r \sin \theta$$

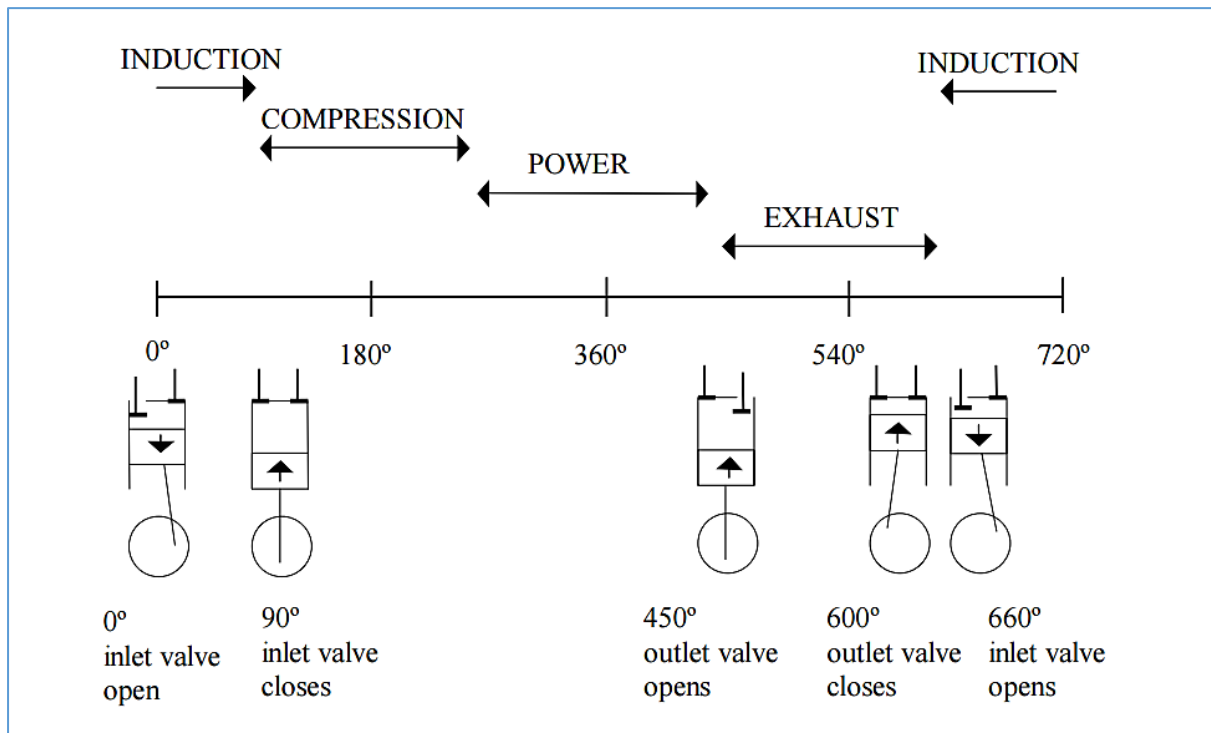
Gellir cyfrifo pellter o ganol y piston uwchben echelin y siafft cranc, a ddangosir fel CA yn ffigur 158:

$$uchder\ piston = ypos + \sqrt{l^2 - xpos^2}$$

Ffigur 159:
System cydlynu ar gyfer
model yr injan diesel

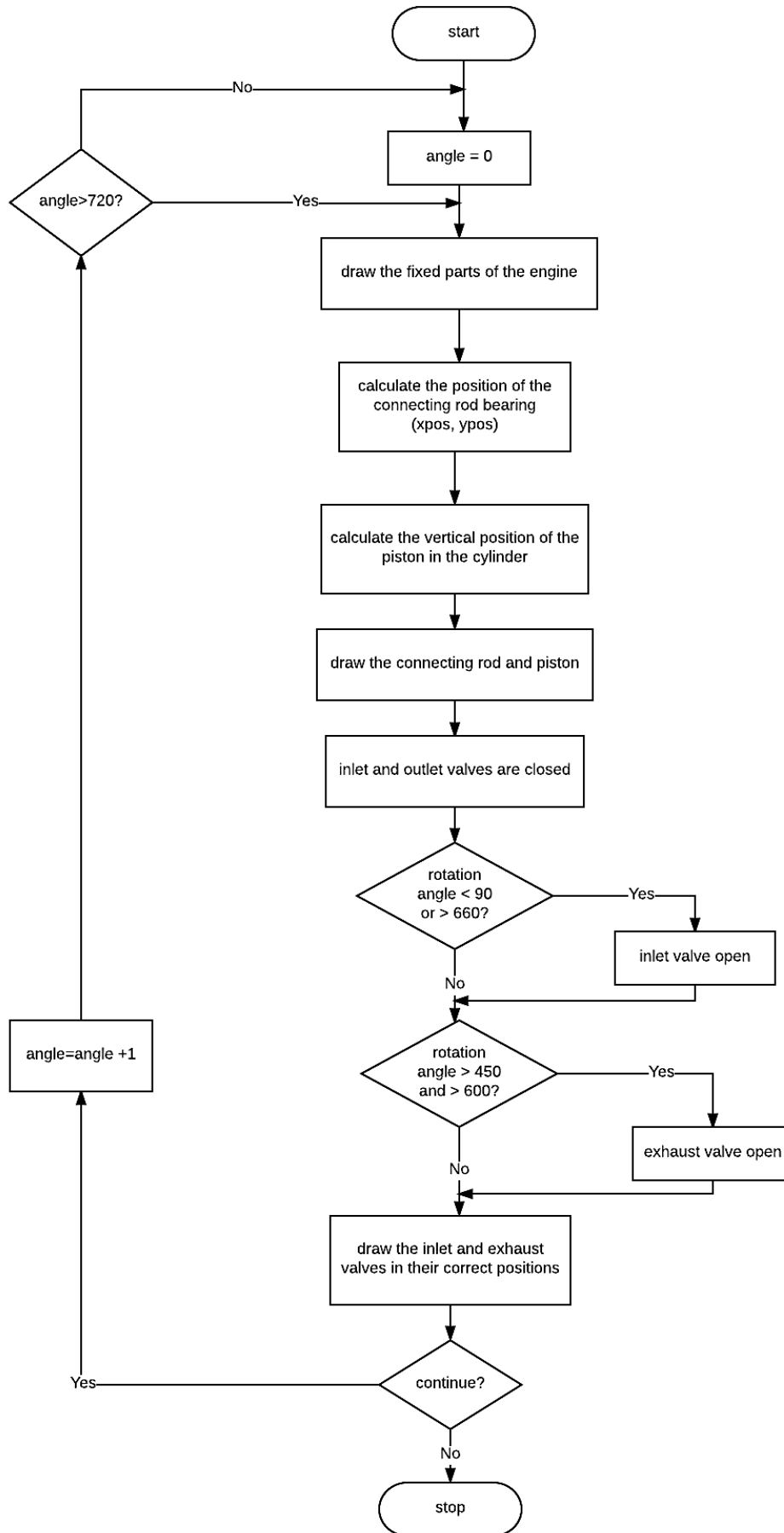


Y gofyniad terfynol ar gyfer yr efelychiad yw dangos y falfiau mewnbwn a gwacáu agor a chau yn y manau cywir yn y cylchred injan. Mae'r cylch peiriant llawn yn cynnwys dau gylchdro o'r siafft crank, wneud ongl cyfanswm o 720°. Mae'r falf fewnfa ar agor ar gyfer onglau cylchdro rhwng 0° a 90°, ailagor ar ddiwedd y cylch ar onglau rhwng 660° a 720°. Mae'r falf allfa wacáu ar agor ar onglau rhwng 450° a 600°.

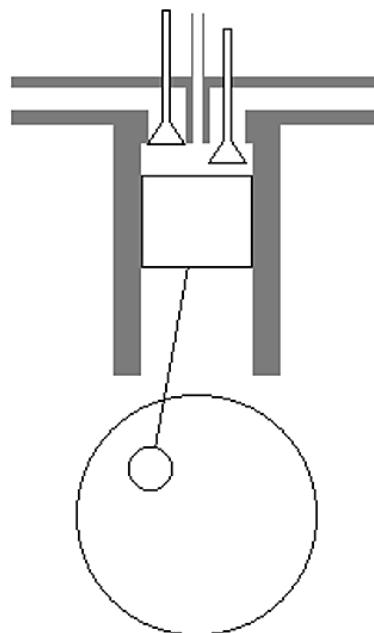


Ffigur 160: Lleoliadau falf yn ystod y cylch injan diesel

Yna gall rhaglen gyfrifiadurol yn cael ei ysgrifennu i gynhyrchu animeiddiad, fel y dangosir yn y siart llif isod.



Ffigur 161: Siart llif ar gyfer yr animeiddiad injan diesel

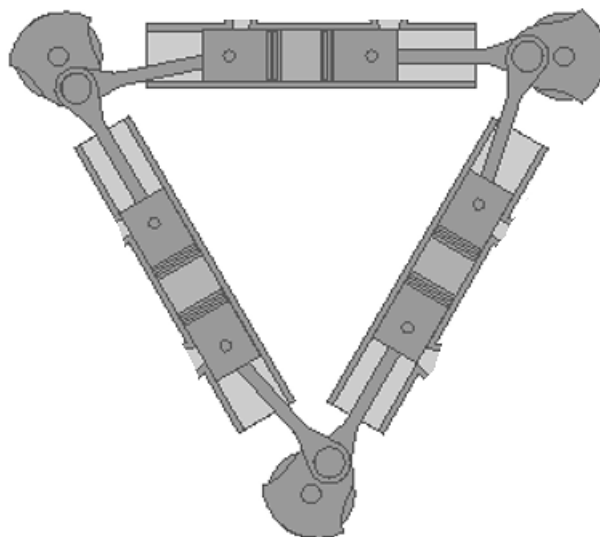


Ffigur 162:
Cynrychiolaeth o'r peiriant diesel yn ystod y strôc gwacáu, gyda'r falf allfa ar agor.

Peiriant locomotif diesel Deltic

Fel dewis cyfleus arall yn lle ysgrifennu rhaglen gyfrifiadurol, gall cymhwysiad cynllunio drwy gymorth cyfrifiadur gyda chyfleusterau animeiddio yn cael ei ddefnyddio i ddangos y mudiant y peiriannau. Yn yr adran nesaf, rydym yn cyflwyno prosiect gan fyfyrwr peirianeg sy'n defnyddio meddalwedd CAD Solidworks i gynhyrchu model tri dimensiwn o beiriant diesel Deltic.

Mae'r dyluniad peiriant Deltic yn unigryw drwy gael grwpiau o dri silindr actio dwbl wedi trefnu mewn patrwm trionglog.



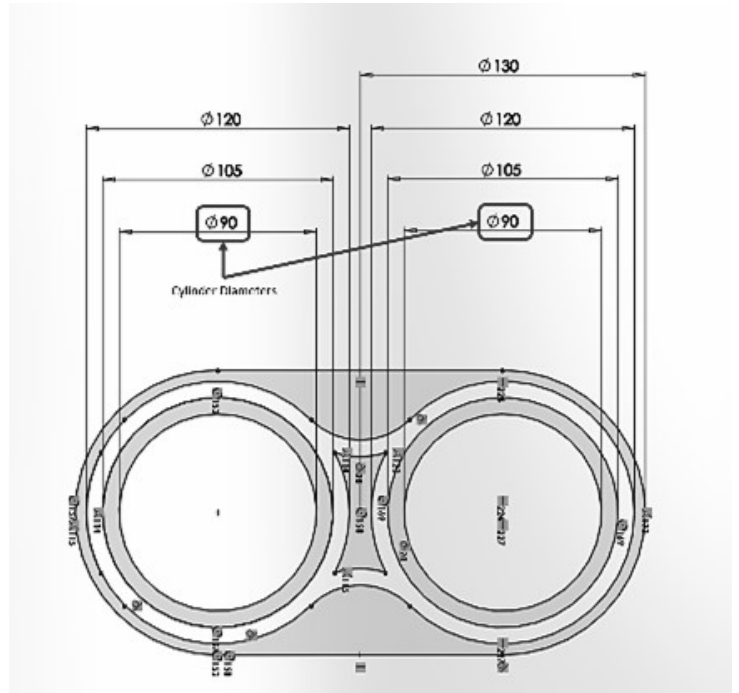
Ffigur 163:
Trefniant trionglog o silindrau actio dwbl y peiriant diesel Deltic

Yn ystod y strôc pŵer, mae'r ddau biston fewn silindr yn cael eu gyrru ar wahân, gan achosi cylchdroi'r ddwy siafft cranc y maent wedi eu cysylltu. Mae hyn yn ei dro yn achosi strôc cywasgu, mewnbyn neu wacáu yn y ddau silindr arall. Mae strôc pŵer yn digwydd ym mhob un o'r tri silindr yn eu trefn.

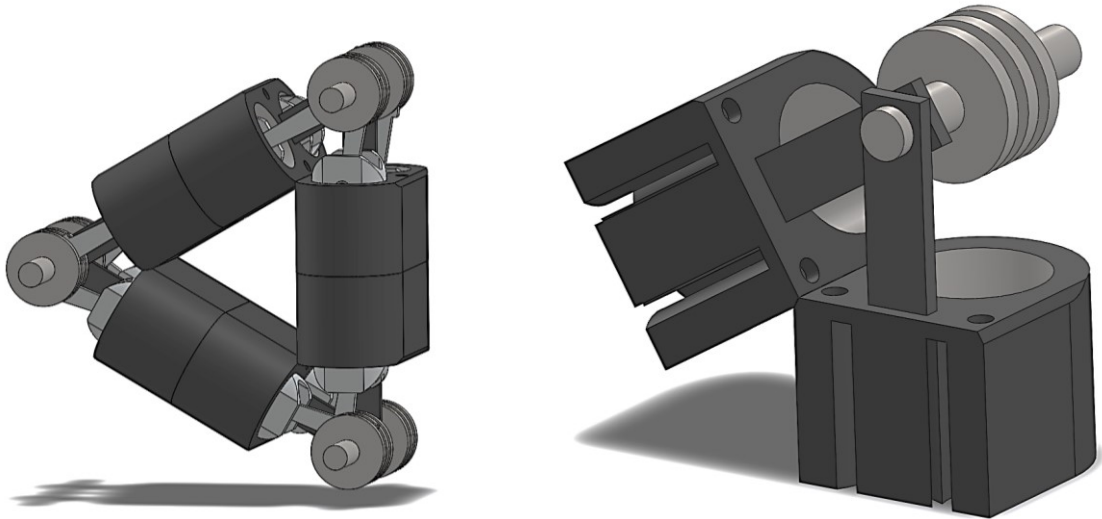
Mae'r canlynol yn ddetholiad o adroddiad y myfyriwr am ei waith dylunio:

Y peth cyntaf i mi gynllunio oedd y silindr. Mae pob banc silindr yn cael ei rannu'n ddau floc silindr wahân cyplu gyda gasged rhyngddynt. Mae hyn yn bennaf yn dylunio cyfeillgar cynnal a chadw i'w gwneud yn haws ac yn rhatach nag i amnewid silindrau.

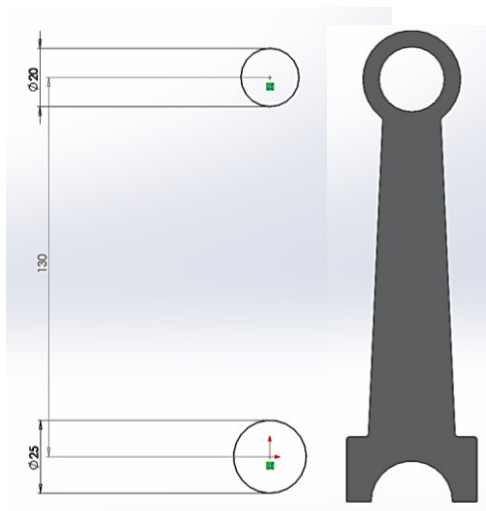
Penderfynais y byddai diamedr o 90mm fod yn ddigonol ar gyfer y model gan y byddai'n ddigon mawr i weithio'n ddamcaniaethol pe bai'r peiriant yn cael ei adeiladu. Mae siaced dŵr o gwmpas y silindrau ar gyfer dibenion oeri.



As the engine has 3 Cylinder banks I need them to be $\frac{1}{3}$ of a turn further through the cycle than the previous so as there is 60° between cylinders and 120° between cycles, I need the angle between cranks to be 180° to ensure each bank is $\frac{1}{3}$ of a turn out from one another.



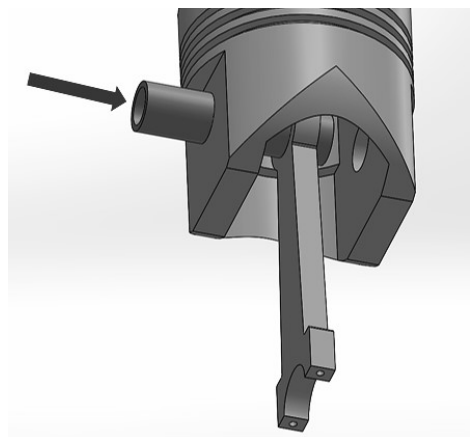
Unwaith cefais y cranc siafftau eu cynllunio, eu rhoes i mewn i'r cynulliad gan ddefnyddio mowntiau canolog i roi'r gofod sydd ei angen ar gyfer cliriadau o'r rhodenni cyswllt. Pan fydd y cranc siafftau eu gosod, yr wyf yn gosod y piston ar y lleoliad a ddymunir. Yna mi fesur o biston i'r cranc i gael maint y rhoden gyswllt.

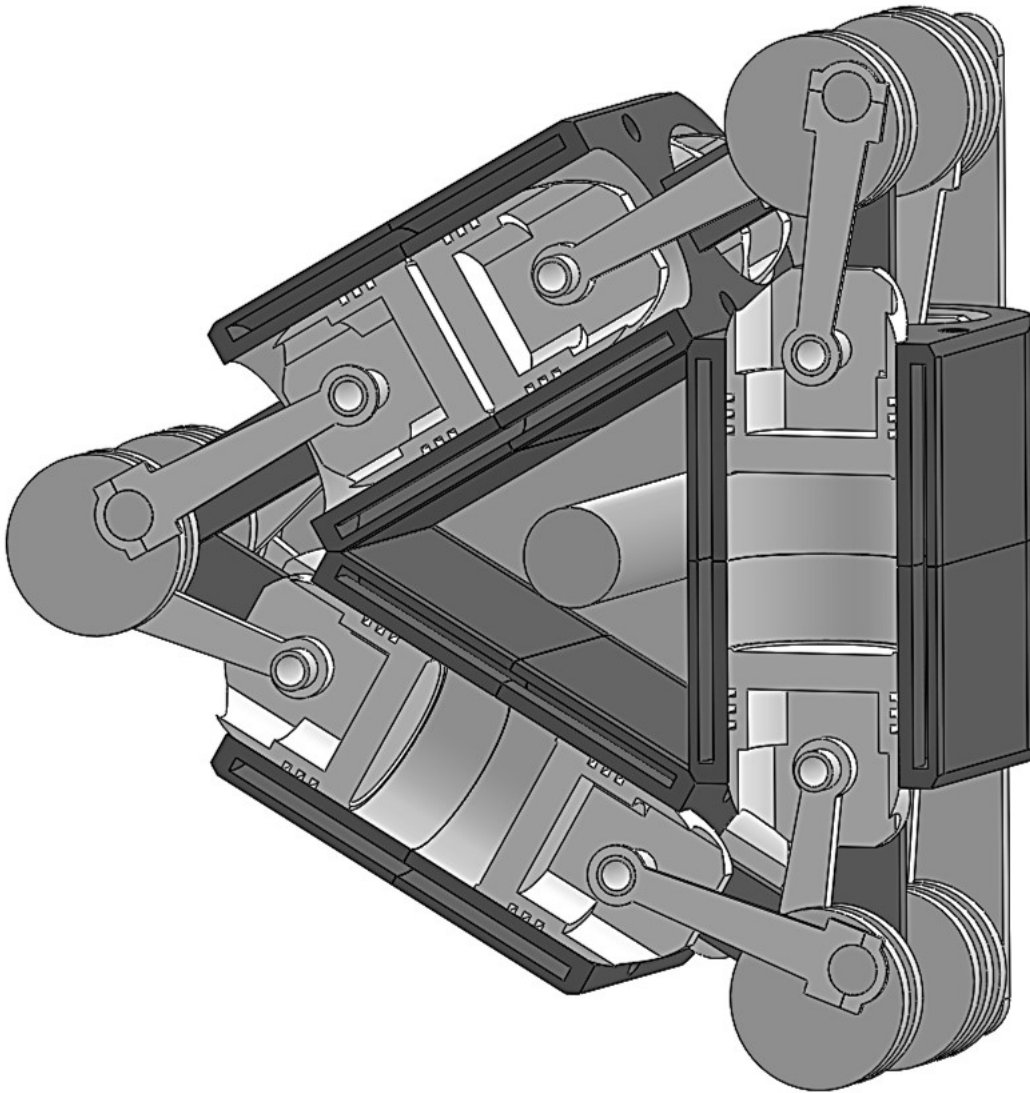


Pan gafwyd yr hyd ei benderfynu, yr wyf yn dechrau gweithio ar ddylunio'r rhoden gyswllt. Yr wyf yn gwneud dau gylch gyda phellter cywir a meintiau cywir ar gyfer y cranc a phin gudgeon (dal y piston i'r rhoden gyswllt). Yna lluniais weddiill y rhoden gyswllt, ond yr wyf yn torri'r ochr cranc yn ei hanner, er mwyn ei roi ar y cranc siafft. Nid oes angen i gael ei rannu fel y pin gudgeon yn cael ei wasgu drwy'r piston a rhoden gyswllt.

Nawr bod y prif elfennau sy'n symud wedi cael eu cynllunio, gallwn i ymgynnull i mewn i fodel gweithredol yn y meddalwedd CAD. Yr wyf yn rhoi yn gyntaf yr holl gydrannau sy'n symud i mewn i'r model ac yn eu paru i arwynebau sydd angen fod mewn cysylltiad.

Unwaith roedd yr holl gydrannau yn eu lle, yr wyf yn rhoi'r peiriant mewn amser ac yn atal unrhyw symudiad nes bod i wedi gwneud system gerio i drosglwyddo'r pŵer i allbwn sengl. Yr wyf yn gwneud dau blât cynhalydd i gynnal siafft PTO yn y canol ac yn cynnal y siafftau cranc ar y ddwy ochr.





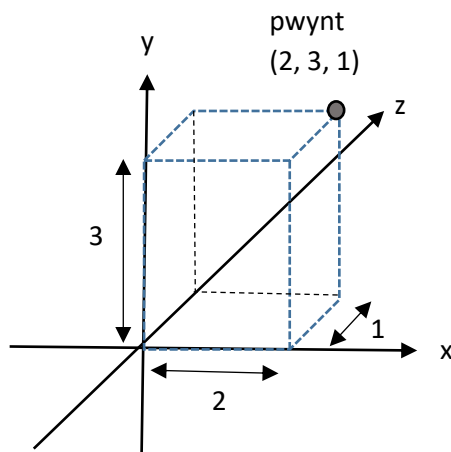
Ffigur 164: Animeiddiad y peiriant a gwblhawyd

Mae'r prosiect hwn yn enghraifft dda o integreiddio rhifedd i mewn i weithgareddau cwrs galwedigaethol. Amrywiaeth o sgiliau wedi cael eu dangos o fewn y diffiniad ehangach o rifedd:

- Datrys problemau, yn diddwytho'r drefn gywir o fudiant y cydrannau peiriant.
- Technegau mathemategol, wrth gyfrifo dimensiynau priodol a llwybrau symud ar gyfer cydrannau.
- Cymhwyso llythrennedd techno fathemategol yn y defnydd o feddalwedd cynllunio drwy gymorth cyfrifiadur.
- Defnyddio gwybodaeth alwedigaethol berthnasol. Roedd y myfyriwr yn gallu cymhwyso ei ddealltwriaeth o weithrediad peiriant diesel syml i ddatblygu'r cynlluniau ar gyfer system fwy cymhleth.
- Cyfathrebu. Gan ddefnyddio technegau animeiddio effeithiol er mwyn helpu i egluro'r cynllun i eraill.

Tafluniad isomedrig

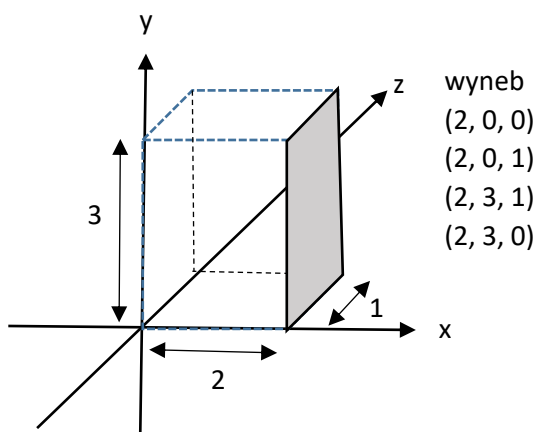
Gall y dechneg a ddisgrifiwyd yn gynharach ar gyfer cynhyrchu animeiddiadau cyfrifiadurol mewn dau ddimensiwn yn cael ei ymestyn mewn ffordd syml i dri dimensiwn drwy ddefnyddio system gydlynu gyda thair echel berpendicwlar:



Ffigur 165: Cynrychioli pwynt mewn tri dimensiwn

Mae pob **pwynt** yn cael ei gynrychioli gan gyfres o dri chyfesuryn, fel yn yr enghraifft hon o bwnt ar y lleoliad $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$.

Gall pwyntiau gael eu cyfuno i greu **wynebau** trwy bennu cyfres o bwntiau sy'n gwneud y perimedr.



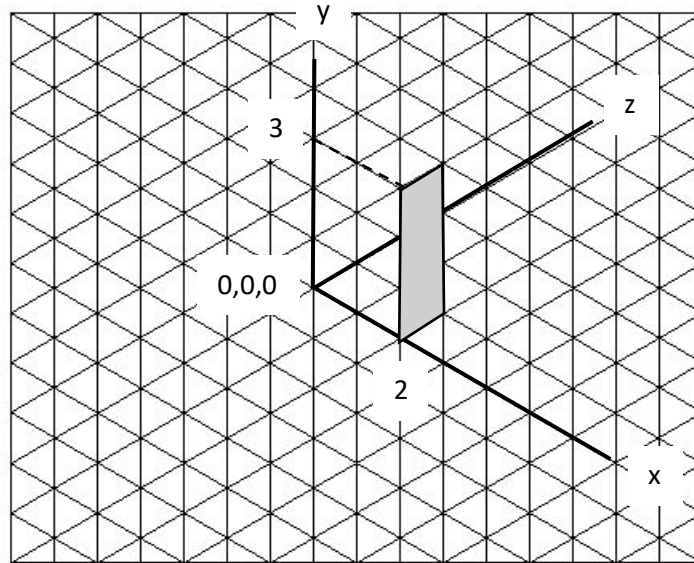
Ffigur 166: Cynrychioli wyneb mewn tri dimensiwn

Unwaith y bydd cyfres o wynebau wedi eu diffinio ar gyfer gwrthrych, yna rhaid i'r rhain gael eu cynrychioli ar sgrin cyfrifiadur.

Yr ydym yn gyfarwydd â gweddlyn persbectif o wrthrychau a welir mewn ffotograffau, lle mae'n ymddangos bod llinellau paralel megis ymylon ffordd neu adeilad ymddangos cydgyfeirio i mewn i'r pellter. Gellir persbectif gael eu cynrychioli mewn delweddau a gynhyrchir gan gyfrifiadur. Fodd bynnag, mae hyn yn ychwanegu cymhlethdod ychwanegol i

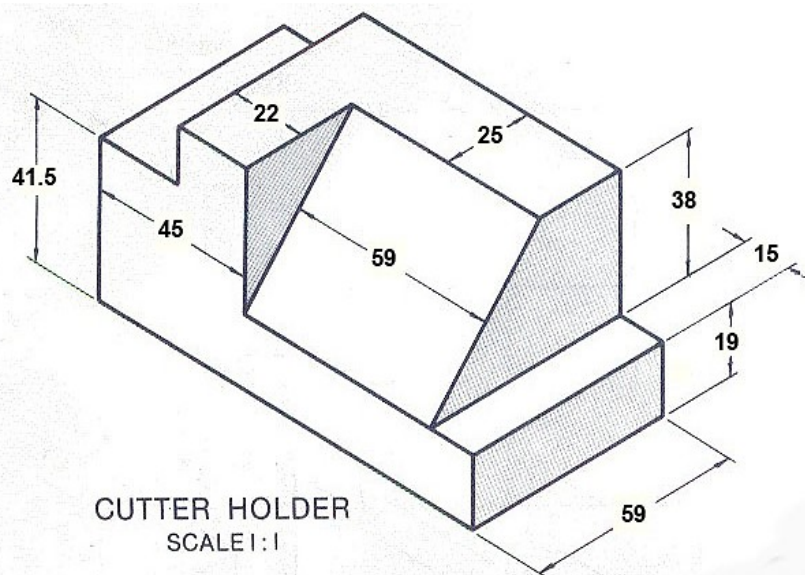
gyfrifiadau graffeg. Mae llawer o systemau dylunio cyfrifiadurol yn hytrach yn defnyddio **tafluniad isomedrig**, lle mae ymylon paralel o wrthrychau yn parhau i fod yn gyfochrog gyda phellter. Mae hyn yn gyffredinol yn darparu cynrychiolaeth foddhaol o beiriannau a fyddai'n cael eu gweld o olygfa gyfagos.

Gall tafluniadau isomedrig ei lluniadu â llaw gan ddefnyddio papur graff arbennig. Mae'r tri cydlynu cyfarwyddiadau yn cael eu cynrychioli gan set o linellau paralel: mae'r cyfeiriadau **x** a **z** yn cael eu goleddu ar 30° i'r llorwedd, tra bod y cyfeiriad **y** yn fertigol. Mae pwynt yn cael ei ddewis fel tarddiad y system gydlynu, yna bydd y grid a ddefnyddir i leoli pwyntiau ac wynebau.



Ffigur 167: Cynrychiolaeth o wyneb mewn tafluniad isomedrig

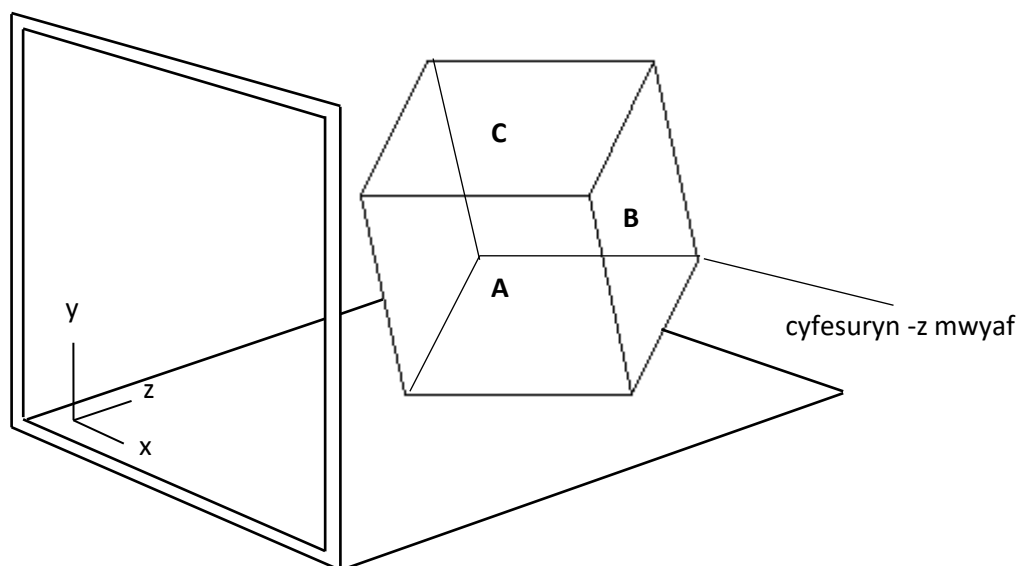
Gall siapiau cymhleth yn cael ei gynhyrchu mewn tafluniad isomedrig, fel yn yr enghraifft hon sy'n cynnwys wyneb ar oleddf.



jmcintyre.wikispaces.com/TDJ3M_Views_and_S

Ffigur 168: Enghraifft o gydran peiriant mewn tafluniad isomedrig

Mae problem sy'n codi mewn cymwysiadau cyfrifiadurol bod rhaid i wynebau yn cael eu hychwanegu yn y drefn gywir os ydynt am orgyffwrdd yn gywir yn y llun terfynol. Cyflawnir hyn trwy **algorithm didoli dyfnder**. Mae angen lluniadu yn gyntaf yr wynebau pellaf oddi wrth y gwylwr, yna bydd y wynebau yn agosaf eu plotio ar ei ben i adeiladu'r darlun. Gan gymryd enghraifft o giwb:



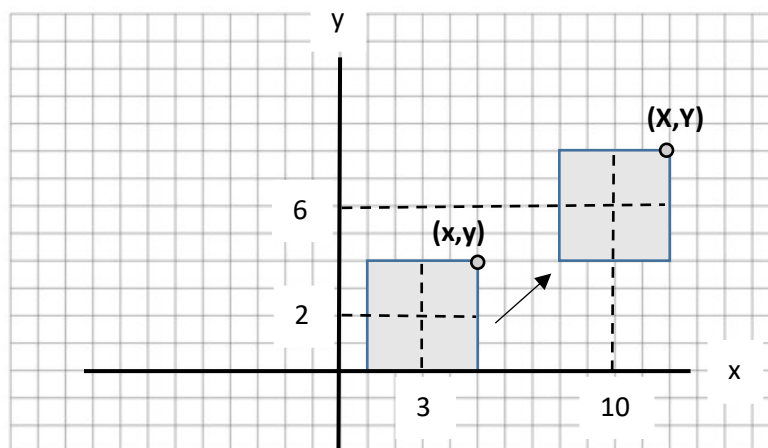
Ffigur 169: Didoli dyfnder wynebau'r ciwb

Mae'r drefn y dylid plotio'r wynebu yn dibynnu ar y cyfesurynnau-z. Yn yr enghraifft hon, dylid wyneb B yn cael eu plotio gyntaf gan ei fod yn bellaf oddi wrth y gwylwr ac mae'n cynnwys **cyfesuryn-z mwyaf** o unrhyw gornel o'r ciwb. **Wynebau C ac A** yn cael **cyfesurynnau z yn is** ar gyfer y corneli, felly bydd yn cael ei phlotio ar ben. Bydd wyneb B mewn gwirionedd yn cael eu cuddio o'r golwg yn y llun gorffenedig o'r ciwb.

Trawsnewidiadau geometrig

Mewn animeiddiad o beiriant, efallai y bydd angen i ni symud neu gylchdroi'r ddelwedd. Symud syml, a elwir yn drawsfudiad, y gellir ei gyflawni drwy addasu'r gwerthoedd y cyfesurynnau. Er enghraifft, mae'n debyg ein bod yn dymuno i symud siâp yn y plân x-y fel bod ei ganol yn symud oddi wrth y pwynt (3, 2) i'r pwynt (10, 6)

Ffigur 170:
Trawsfudiad o siâp yn
y plân x-y

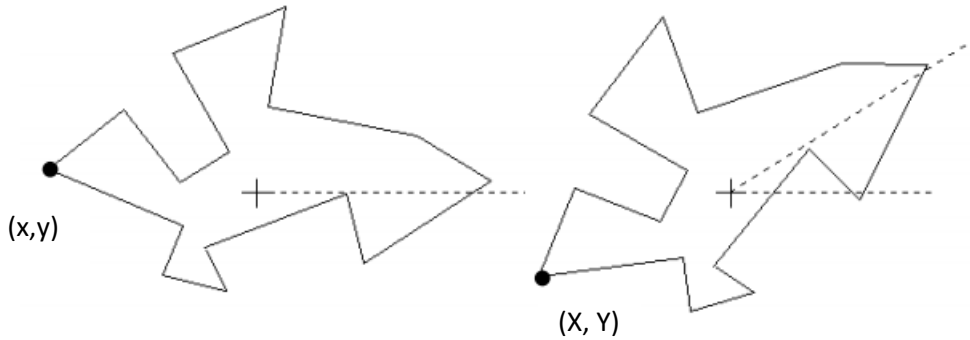


Bydd unrhyw bwynt cyffredinol (x, y) yn cael ei symud i'r pwynt newydd (X, Y) yn ôl hafaliadau:

$$X = x + 7$$

$$Y = y + 4$$

Gellir cylchdro yn cael eu trin mewn ffordd debyg. Tybiwch ein bod yn dymuno i gylchdroi siâp o amgylch tarddiad y plân x-y drwy ongl θ :



O ganlyniad i'r cylchdro, mae pwynt nodweddiadol (x, y) ar siâp yn symud i'r lleoliad (X, Y) . Gan ddefnyddio trigonometreg, mae'n bosibl cyfrifo cyfesurynnau newydd X ac Y:

$$X = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$Y = x \sin \theta + y \cos \theta$$

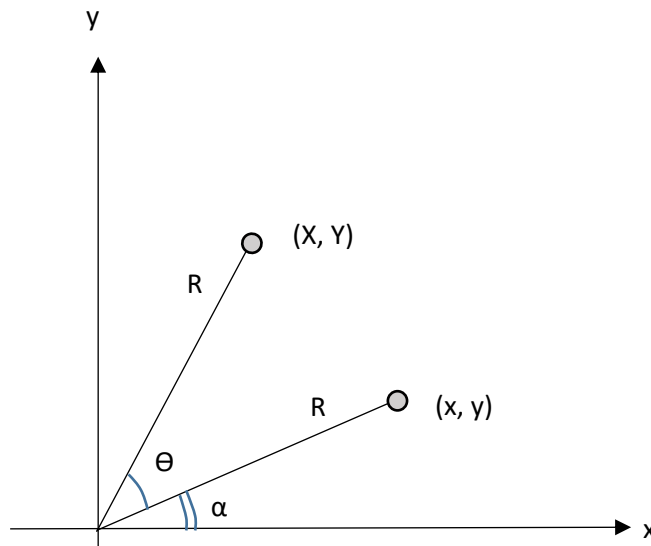
Mae'r hafaliadau yn deillio drwy gyfrwng yr unfathiannau trigonometrig am onglau cyfansawdd:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

a geir mewn gwerslyfrau mathemateg Safon Uwch.

Tybiwch fod cylchdro gan ongl θ yn trawsnewid pwynt cyffredinol o (x, y) i (X, Y) :



Ffigur 171: Cylchdroi pwynt yn y plân x-y

Bydd pellter R o'r pwynt oddi wrth y tarddiad yn aros yr un hyd yn ystod y cylchdro. Felly, os yw α yr ongl gychwynol i'r pwynt:

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

Ar ôl cylchdroi, gyfesurynnau'r pwynt wedi dod yn:

$$X = r \cos(\alpha + \theta)$$

$$Y = r \sin(\alpha + \theta)$$

Gan ddefnyddio'r unfathiant ongl cyfansoddyn:

$$X = r \cos \alpha \cdot \cos \theta - r \sin \alpha \cdot \sin \theta$$

$$Y = r \sin \alpha \cdot \cos \theta + r \cos \alpha \cdot \sin \theta$$

Yn amnewid $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$:

$$X = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$Y = x \sin \theta + y \cos \theta$$

fel y dangosir ar y dudalen flaenorol. Gall yr hafaliadau hyn hefyd yn cael ei ysgrifennu ar ffurf matrices:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Mae'r hafaliadau a'r matricesau yn ffyrdd gwahanol o ddweud yr un peth. O'r rheolau ar gyfer lluosu matricesau, mae yn wastad wir fod:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x.A + y.B \\ x.C + y.D \end{bmatrix}$$

Erbyn hyn mae gennym yr hafaliadau angenrheidiol i gylchdroi gwrthrychau o gwmpas y tarddiad. Fodd bynnag, mae'r sefyllfa yn ychydig yn fwy cymhleth os bydd angen i gylchdroi gwrthrych o amgylch pwynt nad yw yn y tarddiad.

I gyflawni cylchdro am ongl Θ o amgylch pwynt (A, B) , mae'r strategaeth sydd ei angen yw:

- Darganfod cyfesurynnau'r holl bwyntiau ar ffin y siâp gymharu â'r ganol sy'n ofynnol am y cylchdro (A, B) .
- Symud y pwyntiau i'r tarddiad $(0,0)$ drwy dynnu gyfesuryn- x A a chyfesuryn- y B .
- Cylchdroi bob pwynt gan ongl Θ o gwmpas y tarddiad
- Symud yr holl bwyntiau yn ôl i'r ganol cylchdro (A, B) drwy ychwanegu gyfesuryn- x A a chyfesuryn- y B .

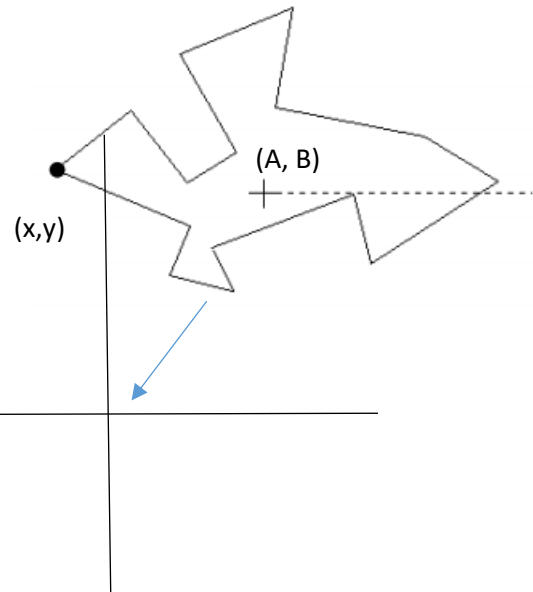
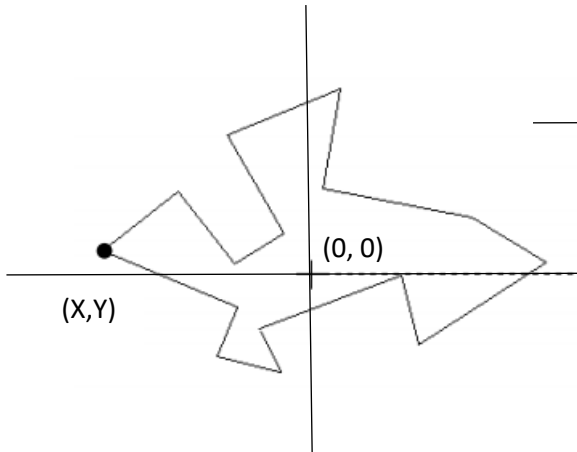
Mae'r dilyniant yn ymddangos yn ffigur 172.

Cam 1

Symud y siâp o ganol y cylchdro (A, B) i'r tarddiad drwy ddefnyddio:

$$X = x - A$$

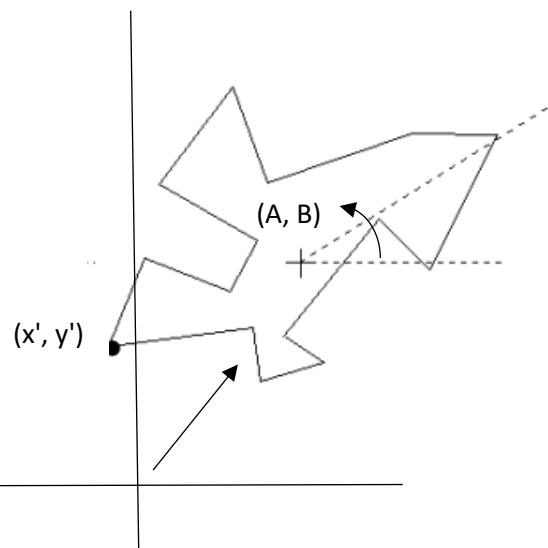
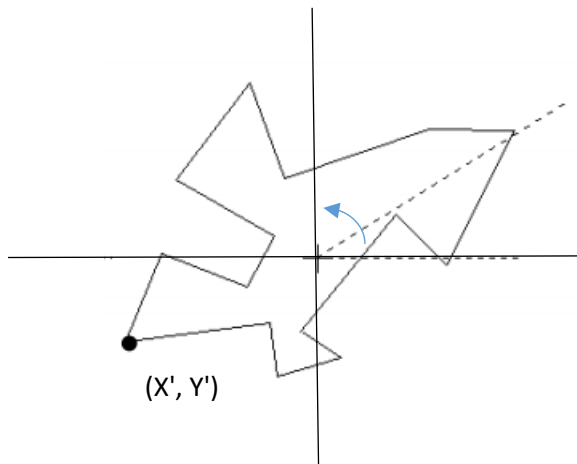
$$Y = y - B$$



Cam 2

Cylchdroi'r siâp yn y tarddiad gan ddefnyddio:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$



Cam 3

Symud y siâp yn ôl at leoliad ganol y cylchdro gan ddefnyddio:

$$x' = X' + A$$

$$y' = Y' + B$$

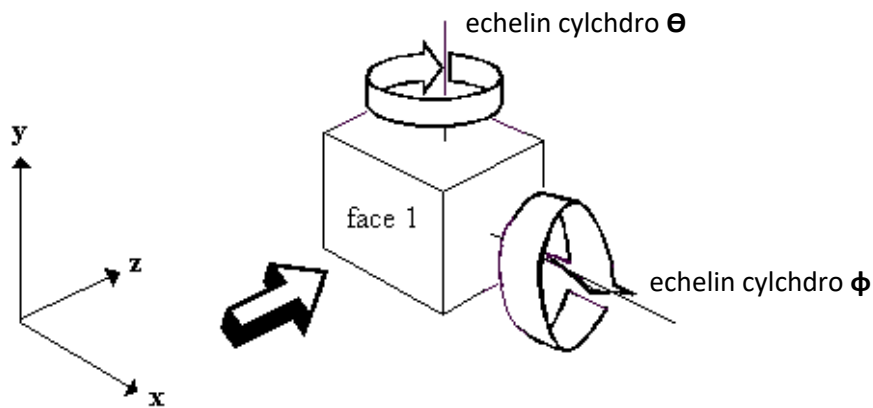
Ffigur 172: Cylchdroi'r gwrthrych o amgylch pwynt nad yw yn y tarddiad

Mae'r matrices sy'n cynnwys y ffwythiannau trigonometrig:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

yn cael ei adnabod fel y matrices cylchdro dau ddimensiwn. Gallwn ddefnyddio hyn er mwyn datblygu fformiwlâu mwy cymhleth ar gyfer cylchdro mewn tri dimensiwn.

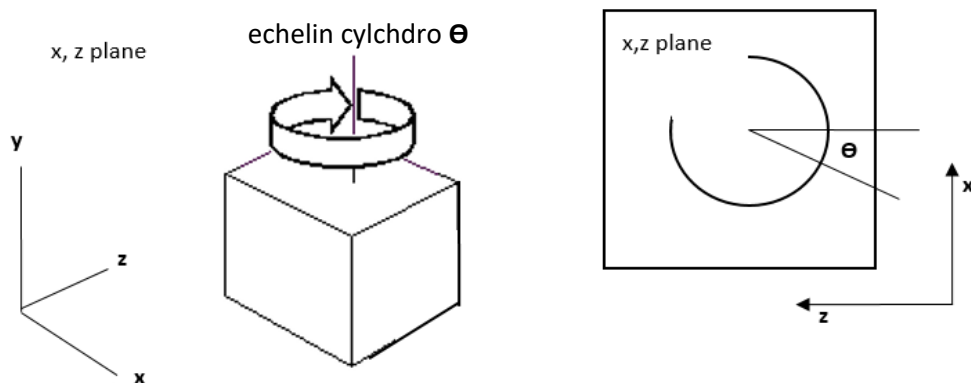
Ystyriwch giwb. Os byddwn yn gweld y ciwb o gyfeiriad yr **echel-z**, rydym yn gweld ddim ond **wyneb 1**:



Ffigur 173: Cylchdroi ciwb o gwmpas dwy echelin

I weld y wynebau eraill, bydd angen cylchdroi'r ciwb. Mae hyn yn debyg i'r cylchdro dau ddimensiwn a ddisgrifiwyd yn flaenorol. Fodd bynnag, bydd symud y ciwb i bob sefyllfa posibl yn gofyn am gylchdro cyfunol o gwmpas dwy echelin - gallwn alw'r ddwy ongl gylchdro Θ {theta} a ϕ {phi}.

Ystyried yn gyntaf y cylchdro Θ . Mae hyn yn digwydd yn y **plân x, z**:



Ffigur 174: Cylchdro gan ongl Θ yn y plân x, z

Tybied bod ryw bwynt gyda'r cyfesurynnau (x, z) ei gylchdroi gan θ ongl fel ei fod yn dod i ben mewn sefyllfa (X, Z) . Gyfesurynnau newydd o'r pwynt yn cael eu rhoi gan y fformiwlâu:

$$X = x \cos \theta - z \sin \theta$$

$$Z = x \sin \theta + z \cos \theta$$

Mae'r rhain yr un fformiwlâu ag ar gyfer cylchdro dau ddimensiwn - rydym wedi defnyddio z yn lle y . Gall y ddau hafaliad hefyd yn cael eu hysgrifennu ar ffurf matrices:

$$\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Beth bynnag, gan ein bod yn gweithio mewn tri dimensiwn, ni ddylem anwybyddu'r cyfesuryn y . Bydd hyn ddim yn cael ei effeithio os yw'r pwynt yn cylchdroi ym **mhlân x, z** , felly bydd y cyfesuryn newydd Y bod yr un fath â'r hen gyfesuryn y . Felly mae'r set lawn o hafaliadau yw:

$$X = x \cos \theta - z \sin \theta$$

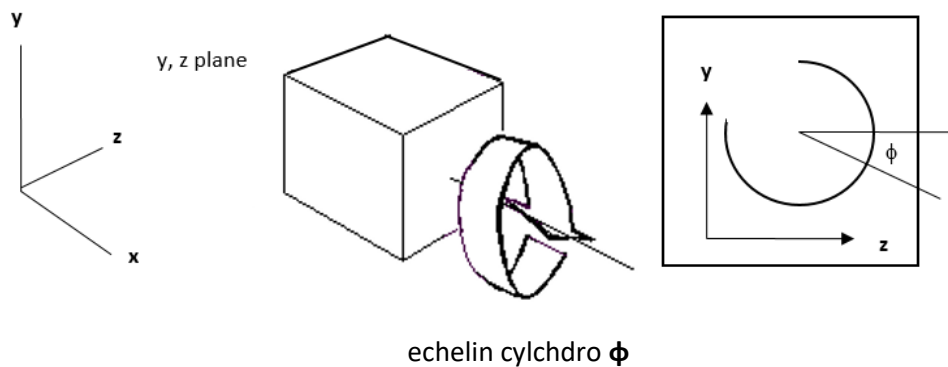
$$Y = y$$

$$Z = x \sin \theta + z \cos \theta$$

Gall y tri hafaliad rhain hefyd yn cael eu hysgrifennu ar ffurf matrices:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Mae'r cylchdro arall ϕ yn digwydd yn y **plân y, z** :



Ffigur 175: Cylchdro gan ongl ϕ yn y plân y, z

Ar gyfer cylchdroadau yn y **plân y, z** , bydd y cyfesuryn x dim yn cael eu heffeithio. Felly, mae'r set o hafaliadau ar gyfer cylchdro yw:

$$X = x$$

$$Y = y \cos \theta - z \sin \theta$$

$$Z = y \sin \theta + z \cos \theta$$

Gall y tri hafaliad rhain yn cael ei ysgrifennu ar ffurf matrices:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Rydym nawr yn cyrraedd yr achos cyffredinol lle mae'r ciwb yn cael ei gylchdroi gan y ddwy ongl, θ a ϕ . Gyda'i gilydd mae'r rhain yn ein galluogi i droi'r ciwb i unrhyw sefyllfa yr ydym yn dymuno.

Gallwn gael y matrices cylchdro tri dimensiwn drwy luosi'r matricesau ar gyfer cylchdro yn y planau x, z a y, z :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cdot \sin \phi & -\sin \theta \cdot \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta & \cos \theta \cdot \sin \phi & \cos \theta \cdot \cos \phi \end{bmatrix}$$

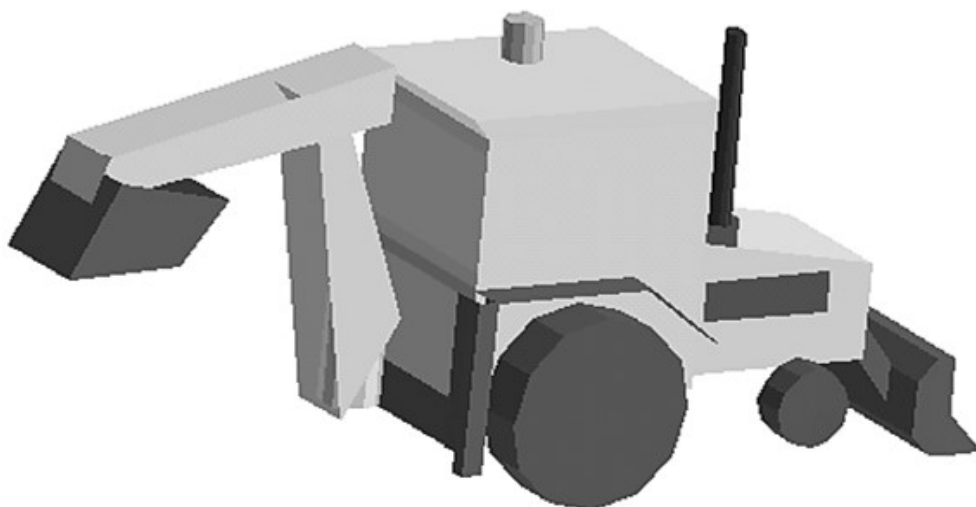
Mae hyn yn arwain at hafaliadau:

$$X = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi - z \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi$$

$$Y = y \cos \phi - z \sin \phi$$

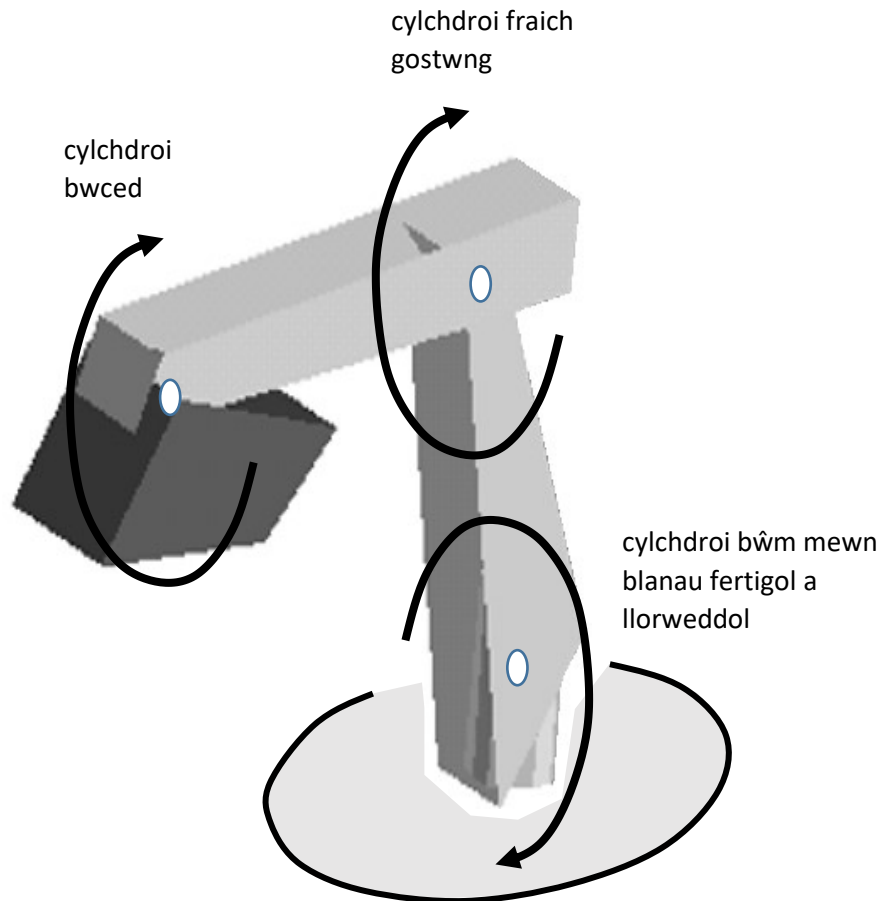
$$Z = x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi + z \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi$$

I weld sut y gall y canlyniad hwn yn cael ei ddefnyddio mewn graffeg gyfrifiadurol, byddwn yn edrych ar brosiect fyfyrwr i arddangos animeiddiad o gloddiwr mecanyddol. Dechreuodd y myfyrwr gan greu delwedd syml o'r cerbyd drwy fewnbynnu'r cyfesurynnau gornel o gyfres o ddarnau arwyneb sy'n ffurfio'r siâp solid:



Ffigur 176: Model solet sylfaenol am y cloddiwr

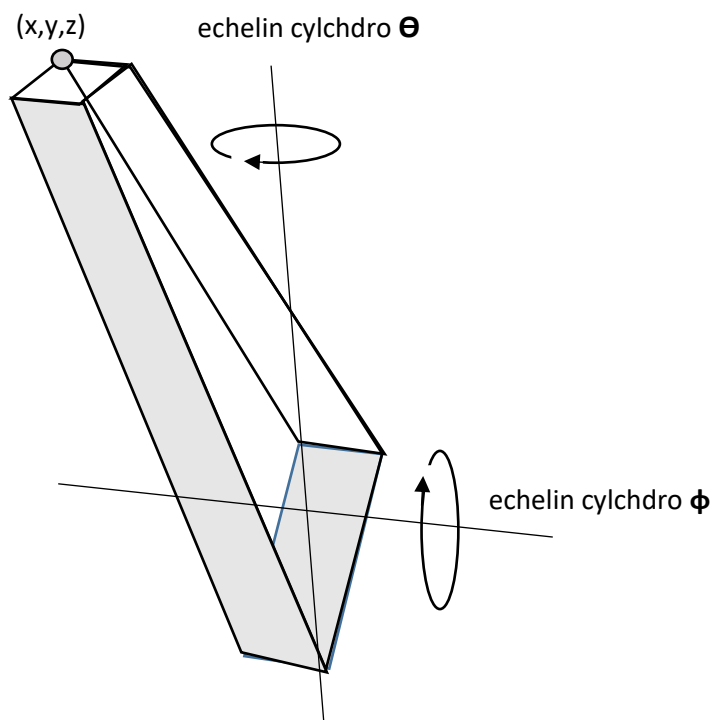
Mae'r fraich cloddio cefn yn cynnwys tair elfen sy'n symud yn annibynnol. Gall y bwm cylchdroi yn llorweddol i naill ochr o'r peiriant, a gall dyrchafu mewn plân fertigol. Gall y fraich gostwng, ynghlwm wrth ben y bwm, hefyd dyrchafu mewn plân fertigol. Gall y bwced ynghlwm wrth ben y fraich gostwng cylchdroi i fyny ac i lawr. Mae'r cynigion yn cael eu cyfuno i gynhyrchu gweithred cloddio.



Ffigur 177: Mudiannau annibynnol o'r fraich cefn y cloddiwr

Yn yr animeiddiad cyfrifiadurol, bydd y defnyddiwr yn gallu rheoli'r cylchdroadau ar wahân gan set o liferi rhith, mewn ffordd debyg i beiriant go iawn. Yna bydd y mudiannau yn cael eu dangos yn nelwedd graffeg y cloddiwr.

Byddwn yn cymryd y tarddiad graffeg fel y croestoriad echelinau cylchdro fertigol a llorweddol ar gyfer y bwm. Byddwn yn dynodi ongl gylchdro lorweddol fel θ a'r ongl gylchdro fertigol fel ϕ .



Ffigur 178: Onglau gylchdroi bwm y cloddiwr

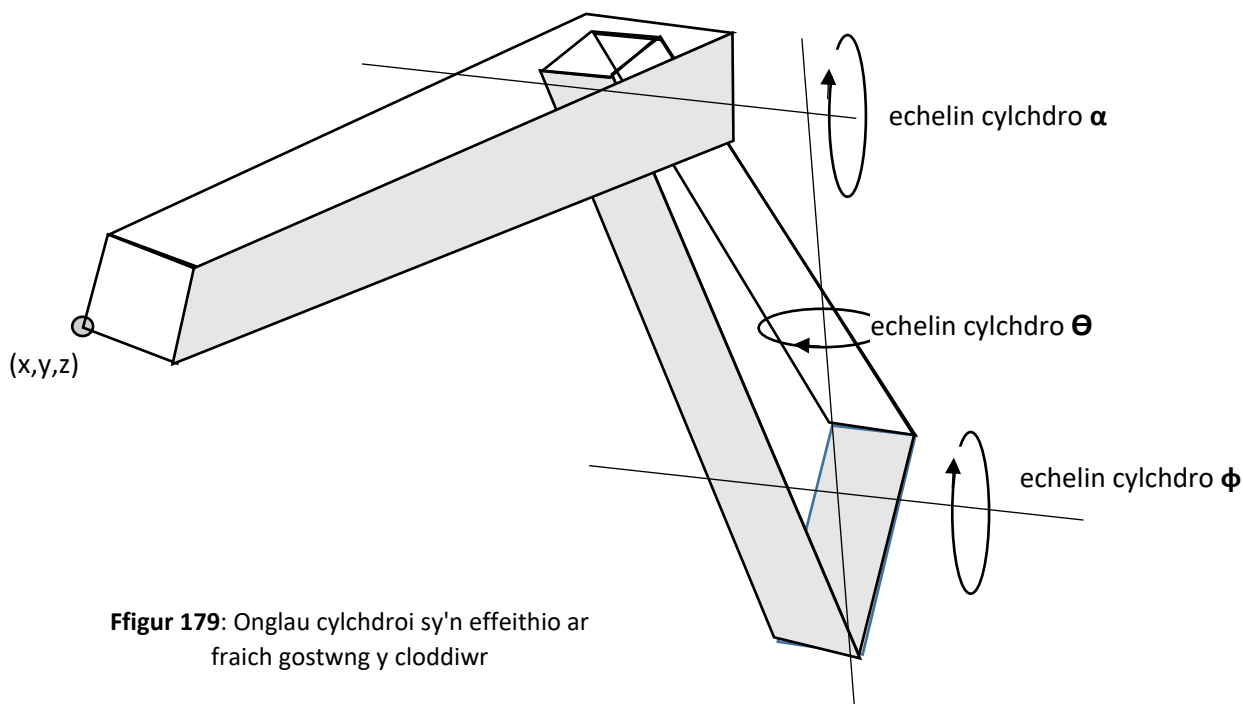
Os bydd unrhyw bwynt ar y bwm gyda chyfesurynnau cyfredol (x, y, z) ei gylchdroi gan ongl θ yn llorweddol ac ongl ϕ yn fertigol, yna bydd y cyfesurynnau newydd o'r pwynt (X, Y, Z) yn cael ei rhoi gan:

$$X = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi - z \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi$$

$$Y = y \cos \phi - z \sin \phi$$

$$Z = x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi + z \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi$$

Gallwn yn awr yn ystyried mudiant y fraich gostwng, sy'n cael ei golyn ar ddiwedd y bwm. Echel arall o gylchdro yn cael ei gyflwyno, a all yn galw α



Ffigur 179: Onglau cylchdroi sy'n effeithio ar fraich gostwng y cloddiwr

Tybiwch fod pwynt (x, y, z) ar y fraich gostwng yn symud trwy α ongl. Mae'r sefyllfa bresennol y bŵm yn effeithio ar sefyllfa'r echelin cylchdroi'r fraich gostwng, a'r cyfeiriad lle bydd cylchdroi'r fraich gostwng yn digwydd. Strategaeth ar gyfer cylchdroi'r fraich gostwng yw:

- Symud pob pwynt ar y fraich gostwng yn ôl at y tarddiad. Gellir gwneud hyn drwy dynnu cyfesurynnau x , y a z cyfredol o'r pwynt canol yr echelin cylchdro α
- Diddymu effeithiau'r cylchdro cyfredol y bŵm. Gellir gwneud hyn drwy gymhwyso cylchdroi $-\Theta$ i bob pwynt ar y fraich gostwng.
- Gweithredu cylchdro fertigol α i'r pwyntiau'r fraich gostwng gan ddefnyddio:

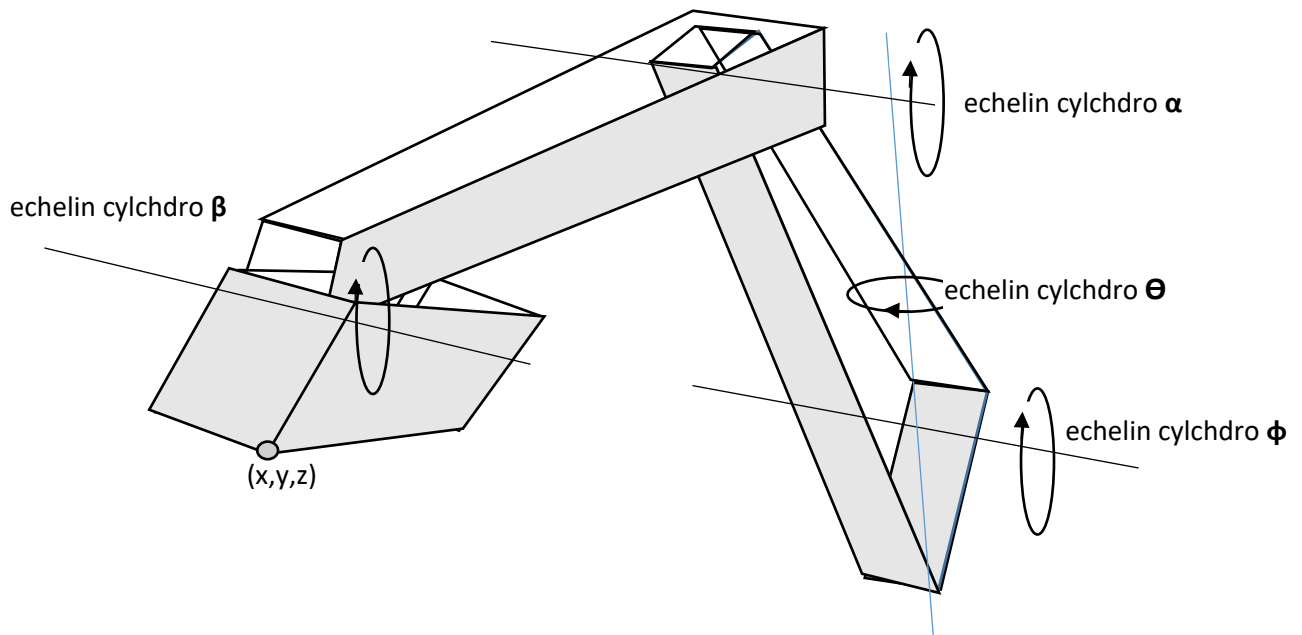
$$X = x$$

$$Y = y \cos \alpha - z \sin \alpha$$

$$Z = y \sin \alpha + z \cos \alpha$$

- Ail-weithredu'r cylchdro presennol y bŵm Θ i bob pwynt ar y fraich gostwng.
- Symud pob pwynt ar y fraich gostwng yn ôl i'r lleoliad cyfredol x , y a z o'r pwynt canol yr echelin cylchdro α

Mudiant y bwced yn cyflwyno echelin cylchdro arall eto, a byddwn yn galw β



Ffigur 180: Onglau cylchdroi sy'n effeithio ar fwced y cloddiwr

Mae'r strategaeth sydd eu hangen i wneud cylchdro o ongl β i'r bwced yn cynnwys cyfres o gamau:

- Symud pob pwynt ar y bwced yn ôl at y tarddiad. Gellir gwneud hyn drwy dynnu cyfesurynnau x , y a z cyfredol o'r pwynt canol yr echelin cylchdro β
- Diddymu effeithiau'r cylchdro cyfredol y bwm. Gellir gwneud hyn drwy gymhwyso cylchdroi $-\theta$ i bob pwynt ar y bwced.
- Gweithredu cylchdro fertigol β i'r pwyntiau'r bwced gan ddefnyddio:

$$X = x$$

$$Y = y \cos \beta - z \sin \beta$$

$$Z = y \sin \beta + z \cos \beta$$

- Ail-weithredu'r cylchdro presennol y bwm θ i bob pwynt ar y bwced.
- Symud pob pwynt ar y bwced yn ôl i'r lleoliad cyfredol x , y a z o'r pwynt canol yr echelin cylchdro β

Crynodeb

Yn y bennod hon rydym wedi edrych ar ystod o dechnegau mathemategol, o arolygu arwynebau tir i gynrychioli cydrannau o adeiladau a pheiriannau. Gall tasgau rhifedd sy'n cynnwys siâp a gofod fod yn berthnasol i ystod eang o gyrsiau, ac yn aml yn darparu heriau diddorol ac ysgogol ar gyfer myfyrwyr.

Mae prosiectau siâp a gofod yn ffitio'n dda i mewn i'r cynllun hyfforddiant rhifedd ehangach, yn cynnwys: mesur, defnydd o dechnoleg gyfrifiadurol, datrys problemau a chyfathrebu, a gofyniad am wybodaeth pwnc manwl o'r maes galwedigaethol.

Gall technegau mathemategol sy'n ofynnol mewn tasgau siâp a gofod yn ymestyn ymhell y tu hwnt i'r cyfrifiad syml o bellteroedd, arwynebedd a chyfaint yn ymwneud â siapiau rheolaidd. Gall problemau yn cymhwyso rhai technegau geometregol a trigonometrïg uwch. Byddwn yn gweld mewn pennod ddiweddarach y gallai calcwlws hefyd yn chwarae rhan yng nghyfrifiadau siâp a gofod.